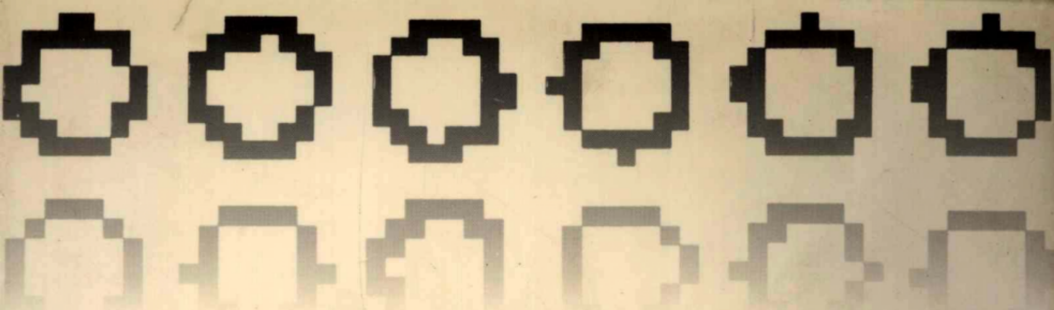
抽象分析基础

宋国柱　曹祥炎　编

南京大学出版社



责任编辑　新　平
责任校对　任玉清
封面设计　朱　蓝



ISBN 7-305-03223-9/O・226
定价:16.00元

南京大学教材出版资助金项目

抽象分析基础

(Elements of Abstract Analysis)

宋国柱　曹祥炎　编

南京大学出版社

内容提要

全书共有十二章，由三部分内容组成：第一篇复分析，介绍了复变函数的连续性，解析函数以及泰勒级数、罗朗级数，复变函数积分中的Cauchy积分定理及其应用，留数的计算和应用以及解析开拓等；第二篇实分析，主要介绍 R^1 中的点集和(L)测度，可测函数以及可测函数序列的收敛性，(L)积分理论，(L)积分序列极限定理及其应用，抽象测度和富比尼定理；第三篇泛函分析，主要介绍距离空间，赋范线性空间和内积空间，距离空间的完备性、可分性和紧性，Banach不动点定理及其应用，Banach空间中关于线性算子的基本定理及其应用，Hilbert空间中有界线性泛函，有界自伴算子、正算子和酉算子.

本书可作为综合性大学和师范院校数学系基础数学、应用数学、计算数学专业的教材.

书　名　抽象分析基础
编　者　宋国柱　曹祥炎
责任编辑　新　平
封面设计　朱　蓝
责任校对　任玉清
出版者　南京大学出版社
　　(南京汉口路22号　南京大学校内　邮编210093)
印刷　常熟市印刷八厂
经销　全国各地新华书店
开本　850×1168毫米　1/32　印张13.125　字数339千
1999年6月第1版　1999年6月第1次印刷
印数　2000
定价　16.00元
书号　ISBN　7-305-03223-9/O·226

前　言

本教材由三部分内容组成，第一部分是复分析，第二部分是实分析，这两部分内容是数学分析中微积分理论的发展和深化，也是现代分析数学的重要基础。第三部分是泛函分析。泛函分析是现代分析的一个重要分支，它主要研究无限维空间及其上的映射的一般性质，这三部分内容构成了现代分析的基础。本书将介绍复分析、实分析的基本内容和泛函分析的初步知识。

本书是在“加强基础，因材施教，淡化专业，分流培养”这一思想指导下，按照数学系新的教学计划，结合数学系原来的三门基础课（复变函数，实变函数和泛函分析）的教学大纲，把三个学期(216 学时)的课程压缩为两个学期(142—162 学时)的课程。在材料的取舍和安排上，我们力求抓住最基本的内容及主要线索，做到由浅入深，突出重点。书中带 * 号的章节以及有关的部分内容，可以根据各专业的需要和学时安排，自行取舍，为了帮助读者理解和掌握主要内容，提高解题能力，开阔思路，本书选用了一定数量与正文紧密配合的例题和习题（习题将另册出版），其中部分难度较大的习题给出了提示，读者应达到能独立解答书中大部分习题的要求。

本书的编写得到了数学系领导的大力支持。由于时间仓促，书中一定存在不少问题，敬请读者批评指出。

编　者

1998 年 12 月

目　　录

第一篇　复分析（40 学时）

引　言……………………………………………………（ 1 ）

第一章　复数与复变函数…………………………………（ 2 ）

§1　复数 ……………………………………………（ 2 ）
§2　复平面上的点集及区域 …………………………（ 7 ）
§3　复变函数及其极限与连续性 ……………………（ 10 ）

第二章　解析函数…………………………………………（ 14 ）

§1　解析函数概念 ……………………………………（ 14 ）
§2　柯西-黎曼(Cauchy-Riemann)方程 ……………（ 17 ）
§3　导数的几何意义及保形变换概念 ………………（ 20 ）
§4　初等解析函数 ……………………………………（ 23 ）

第三章　复变函数的积分…………………………………（ 34 ）

§1　复变函数的积分概念与性质 ……………………（ 34 ）
§2　柯西积分定理 ……………………………………（ 39 ）
§3　柯西积分公式及其推论 …………………………（ 47 ）

第四章　解析函数的级数…………………………………（ 55 ）

§1　复函数项级数 ……………………………………（ 55 ）
§2　幂级数 ……………………………………………（ 59 ）
§3　泰勒级数 …………………………………………（ 63 ）

§4　罗朗级数 …………………………………… (71)

第五章　留数理论及其应用 …………………………… (87)

§1　留数及其计算 …………………………………… (87)
§2　留数理论在定积分计算上的应用 ………………… (95)
§3　幅角原理及其应用 ……………………………… (107)

第六章　解析开拓 …………………………………… (113)

§1　解析开拓的概念与方法 ………………………… (113)
§2　多值函数的黎曼曲面 …………………………… (120)

第二篇　实分析（54学时）

第七章　集·直线上的点集 ………………………… (124)

§1　集合及其运算 …………………………………… (124)
§2　映射·集的对等·可列集 ………………………… (128)
§3　集的势·半序集 ………………………………… (132)
3.1　集的势 ………………………………………… (132)
*3.2　半序集和佐恩引理 ………………………… (136)
§4　数直线 R 中的点集 ………………………… (138)
4.1　一维开集，闭集及其性质 ………………… (138)
4.2　R 中开集的构造 ………………………… (141)
4.3　康托集 ……………………………………… (143)

第八章　勒贝格测度 ………………………………… (146)

§1　R 中点集的外测度、内测度 ………………… (146)
§2　勒贝格可测集及其性质 ………………………… (151)
§3　勒贝格可测集类 ………………………………… (159)

3.1 开集、闭集的可测性 …………………… (159)
3.2 波雷尔集…………………………………… (161)
*3.3 勒贝格不可测集…………………………… (162)

第九章 可测函数………………………………………… (165)

§1 可测函数及其基本性质 ……………………… (165)
1.1 可测函数的定义…………………………… (165)
1.2 可测函数的基本性质……………………… (168)
§2 可测函数列的收敛性 ………………………… (171)
2.1 近一致收敛和叶果洛夫定理……………… (172)
2.2 测度收敛和黎斯定理……………………… (174)
§3 可测函数的结构(鲁金定理) ………………… (178)

第十章 勒贝格积分………………………………………… (182)

§1 勒贝格积分的定义和性质 …………………… (182)
1.1 勒贝格积分的定义………………………… (182)
1.2 勒贝格积分的性质………………………… (186)
§2 积分序列的极限定理 ………………………… (198)
2.1 勒维定理、法杜定理和控制收敛定理 …… (199)
2.2 极限定理的应用…………………………… (204)
§3 微分和积分 …………………………………… (208)
3.1 单调函数和囿变函数……………………… (209)
3.2 绝对连续函数和牛顿-莱布尼兹公式 …… (213)
*§4 抽象测度与积分·富比尼定理 ……………… (220)
4.1 σ代数上的测度及其初等性质 …………… (220)
4.2 外测度和勒贝格测度……………………… (224)
4.3 可测函数与 μ 积分 ……………………… (229)
4.4 乘积测度和富比尼定理…………………… (231)

第三篇　泛函分析（66 学时）

第十一章　距离空间·赋范线性空间 ······ (240)

§1　距离空间 ······ (240)
1.1　距离空间的定义和实例 ······ (240)
1.2　距离空间的点集和映射 ······ (247)
1.3　稠密性和可分性 ······ (252)
1.4　完备性 ······ (254)
§2　赋范线性空间 ······ (258)
2.1　线性空间 ······ (259)
2.2　赋范线性空间 ······ (261)
2.3　空间 $L^P[a,b](1\leqslant P<\infty)$ 和 $L^\infty[a,b]$ ······ (265)
2.4　空间 $l^P(1\leqslant P<\infty)$ 和 l^∞ ······ (273)
§3　紧性 ······ (277)
3.1　列紧集与全有界集 ······ (278)
3.2　紧集 ······ (281)
3.3　具体空间中集合列紧性的判别法 ······ (283)
3.4　紧集上的连续映射 ······ (286)
3.5　有限维赋范线性空间 ······ (287)
§4　压缩映射原理及其应用 ······ (293)
4.1　Banach 不动点定理 ······ (294)
4.2　压缩映射原理的应用 ······ (298)
*4.3　凸紧集上的不动点定理 ······ (305)
§5　内积空间 ······ (306)
5.1　内积空间的定义及其性质 ······ (307)
5.2　直交和直交分解定理 ······ (312)
5.3　内积空间中的标准直交系 ······ (317)

第十二章　线性算子和线性泛函………………………………(329)

§1　有界线性算子 ………………………………………………(329)

1.1　线性算子的有界性和连续性……………………………(329)

1.2　线性算子空间……………………………………………(336)

§2　Hahn-Banach 延拓定理 ………………………………………(340)

2.1　Hahn-Banach 定理…………………………………………(340)

2.2　某些具体空间上的有界线性泛函…………………………(348)

2.3　共轭空间·共轭算子………………………………………(356)

§3　Banach 逆算子定理·闭图象定理·共鸣定理 ……………………(362)

3.1　逆算子和 Banach 逆算子定理 ……………………………(362)

3.2　闭线性算子和闭图象定理…………………………………(369)

3.3　共鸣定理及其应用…………………………………………(372)

3.4　弱收敛………………………………………………………(380)

§4　全连续算子及其初等性质 ……………………………………(386)

§5　Hilbert 空间上的线性泛函和线性算子 …………………………(391)

5.1　Hilbert 空间上有界线性泛函的表示 ……………………(391)

5.2　共轭算子及其简单性质……………………………………(392)

5.3　有界自伴算子,正算子和投影算子 ………………………(397)

5.4　等距算子和酉算子…………………………………………(406)

参考书目……………………………………………………………(408)

第一篇 复 分 析

引 言

复变函数论这门学科是由于客观实际的需要而产生和发展起来的．到今天已成为一门内容非常丰富、应用极为广泛的重要数学分支．

在18世纪由欧拉(L. Euler)、高斯(C. F. Gauss)等数学家正式引入了复数及复变函数等概念，建立了一些基本定理．而复变函数的系统理论基础是在19世纪奠定的，主要由柯西(A. Cauchy)建立了复变函数的积分理论，维尔斯特拉斯(K. weierstrass)建立了解析函数的级数理论，以及黎曼(B. riemann)建立了共形映射等几何理论，并逐步将复变函数的理论与方法渗入到代数学、数论、拓朴学、概率论、微分方程与积分方程等其它数学分支．同时广泛应用到热力学、流体力学、空气动力学、电学、理论物理等其它学科．随着自然科学的发展与解决实际问题的需要，近代，复变函数又开辟了一些新的方向，如多元复变函数论、广义解析函数论、拟保形变换、整函数与亚纯函数的值分布理论等．本篇只讲述单复变函数的基本理论和有关方法，不涉及多复变函数方面问题，主要内容包括单复变函数的导数、积分、级数表示，留数理论以及解析开拓等．

由于复变函数论中的许多概念理论与方法是实变函数在复数域内的推广与发展，所以，它们之间有许多相似之处，但是也有许多不同之点．我们将重点放在它们之间的差异上，力求将内容写得简明扼要，减少学时，希望读者在学习这门课程时既要紧紧抓住复变函数与实变函数之间的联系，更要弄清它们间的不同点，要正确理解与牢固掌握解析函数论中的概念与方法，并逐步提高自己抽象思维能力与解决实际问题的能力．

第一章　复数与复变函数

复变函数是实变函数概念的推广．本章首先简单叙述复数有关内容，然后引入平面上的点集、区域概念，接着介绍复变函数概念，给出复变函数的极限与连续的定义及其性质．

§1　复　　数

1.1　复数及其运算

我们把复数集 C 定义为所有有序数对 (x,y) 的集合，其中 x，y 为实数，复数 (x,y) 常用 z 表示，记作 $z=x+\mathrm{i}y$，其中 x 称为 z 的**实部**，记作 $\mathrm{Re}z$，y 为 z 的**虚部**，记作 $\mathrm{Im}z$.

两个复数相等，当且仅当它们的实部和虚部分别相等．

复数的四则运算定义如下：设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$，$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$，则

$$z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+\mathrm{i}(y_1\pm y_2),$$

$$z_1\cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1),$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

不难验证复数的四则运算满足加法与乘法的交换律、结合律以及乘法对加法的分配律.

我们定义 z 的共轭数为 $\bar{z}=x-\mathrm{i}y$，复数 z 的模为 $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$，容易证得以下性质成立.

(1) $|z|^2=z\cdot\bar{z}$ 特别地若 $z\neq0$，则 $\dfrac{1}{z}=\dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$，

(2) $\mathrm{Re}z=\dfrac{1}{2}(z+\bar{z})$，$\mathrm{Im}z=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}(z-\bar{z})$，

(3) $\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$，

(4) $\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$，

(5) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$，

(6) $|\bar{z}|=|z|$，

(7) $|z_1z_2|=|z_1|\,|z_2|$，

(8) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$.

1.2 复数的表示法

从复数的定义可见，对任意一个复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 都可以和平面上的点 (x,y) 一一对应，其中 x 为该点的横坐标，y 为该点的纵坐标，这样用点来代表复数的平面称为**复平面**.

复数 z 也可看成从原点出发，终点在 z 的向量，向量的长度为 z 的**模**，表示 z 的向量与 x 轴正向的夹角 θ 称为 z 的**辐角**，记作 $\mathrm{Arg}z=\theta$(图 1.1)，这时有 $\mathrm{tg}(\mathrm{Arg}z)=\dfrac{y}{x}$. 根据图 1.1，我们有不等式

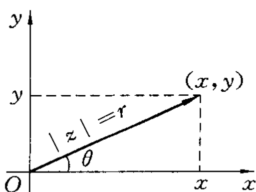


图 1.1

$$|x|\leqslant|z|,\quad |y|\leqslant|z|,\quad |z|\leqslant|x|+|y|.$$

Arg$z$ 有无穷多个值，其中每两个值相差 2π 的整数倍.

当 $-\pi<\arg z\leqslant\pi$，称 $\arg z$ 为 z 的**主幅角**

$$\operatorname{Arg}z=\arg z+2k\pi,\ k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots$$

当 $z=0$ 时，$|z|=0$ 而幅角不确定.

当 $\arg z(z\neq 0)$ 表示 z 的主幅角时，它与 $\operatorname{Arctg}\dfrac{y}{x}$ 的主值 $\operatorname{actg}\dfrac{y}{x}$ 有如下关系：

$$\arg z=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & \text{当 } z \text{ 在第一象限时}\\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}+\pi, & \text{当 } z \text{ 在第二象限}\\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}-\pi, & \text{当 } z \text{ 在第三象限}\\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} & \text{当 } z \text{ 在第四象限}\end{cases}\quad \text{其中} -\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg}\frac{y}{x}<\frac{\pi}{2}.$$

根据复数的运算法则可知，两个复数的加减运算和相应向量的加减法运算一致

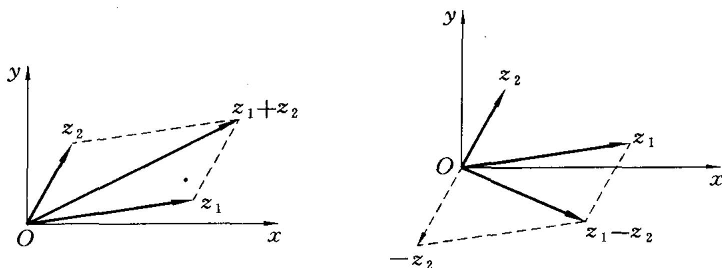


图 1.2

注意 $|z_2-z_1|$ 就是 z_1 与 z_2 之间的距离，因此有

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|,$$

$$|z_1-z_2|\geqslant\big||z_1|-|z_2|\big|.$$

利用直角坐标与极坐标的关系：$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$.

还可得到 z 的三角表示：$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$

以及 z 的指数表示：$z=re^{i\theta}$.

1.3 复数的乘幂与方根

设 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$则

$$\begin{aligned}z_1z_2 &=r_1r_2(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\\&=r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)\\&\quad+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_2\cos\theta_1)]\\&=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)].\end{aligned}$$

由上式可得 $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$，$\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2$，一般地，令 $z_k=r_k(\cos\theta_k+i\sin\theta_k)$ $(k=1,2,\cdots n)$则有

$$\begin{aligned}z_1z_2\cdots z_n=&r_1r_2\cdots r_n[\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)\\&+i\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)].\end{aligned}$$

特别当 $z_1=z_2=\cdots\cdots=z_n=z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$时，有

$$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)\quad(z\neq 0).$$

当 z 的模 $r=1$，即得棣莫佛(De Moivse)公式：

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta.$$

下面我们来求方程 $z^n=a$ 的根，其中 a 为已知复数，$n\geqslant 2$，设 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$a=|a|(\cos\alpha+i\sin\alpha)$，根据棣莫佛公式有

$$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=|a|(\cos\alpha+i\sin\alpha),$$

于是 $r^n=|a|$，　$\cos n\theta=\cos\alpha$，　$\sin n\theta=\sin\alpha$

由此得　$r=|a|^{\frac{1}{n}}$，　$\theta=\dfrac{\alpha+2k\pi}{n}$ $(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$．

所以 $z=\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{|a|}\left(\cos\dfrac{\alpha+2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{\alpha+2k\pi}{n}\right)$

当 $k=0,1,2,\cdots,n-1$ 时，得到 n 个相异的根

$$z_0=\sqrt[n]{|a|}\left(\cos\frac{\alpha}{n}+i\sin\frac{\alpha}{n}\right),$$

$$z_1=\sqrt[n]{|a|}\left(\cos\frac{\alpha+2\pi}{n}+i\sin\frac{\alpha+2\pi}{n}\right)$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$,

$$z_{n-1} = \sqrt[n]{|a|}\left(\cos\frac{\alpha+2(n-1)\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\alpha+2(n-1)\pi}{n}\right).$$

当 k 以其它整数值代入时，这些根又重复出现，所以 a 的 n 次方根 $\sqrt[n]{a}$ 只有 n 个不同的复数，从几何意义来看，$\sqrt[n]{a}$ 的 n 个值可用一个内接于以原点为中心 $\sqrt[n]{|a|}$ 为半径的圆的正 n 边形的 n 个顶点来表示．

1.4 扩充复平面

在全部复数中不存在这样一个数，它是一个复数被零所除的商，在复分析中我们亦常常涉及到一些函数，当自变量趋于给定点时，它们趋于无穷，因此有必要将复数系统加以扩充引入一个数 ∞，叫做无穷大，在复平面上没有一点和 ∞ 相对应，但我们可设想平面上有一个理想点和它相对应，这个理想点称它为**无穷远点**，这样我们就引进了扩充复平面 $C_\infty = C \cup \{\infty\}$. 为了给出 C_∞ 的直观图象，黎曼 (B. Riemann)引入了复数球面表示法．

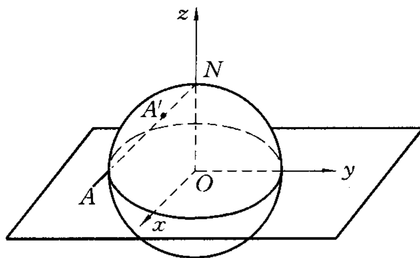


图 1.3

以复平面的原点为球心作半径为 1 的球：$S = \{(x,y,z) \in R^3 / x^2+y^2+z^2=1\}$，取定球面上一点 $N(0,0,1)$，即 N 是球面 S 上的北极，设 $A(x,y,0)$ 是复平面上任一点，作连接 N 与 A 的直线，这直线与球面交点为 A'，那么 A' 称为 A 在球面上的**球极射影**，这样每一复数 z 对应于球面上不是 N 的唯一的点，若 $|z|<1$，则此对应点在下半球面上，若 $|z|>1$，对应点在上半球面上，若 $|z|$

$=1$，则对应点为本身，反之球面上除去 N 以外的每一点对应于唯一复数，若一点 z 的模愈大，则它的球极射影就愈接近于球极 N，于是约定球面上的点 N 对应于复平面上的无穷远点．因此全部复数（构成扩充复平面）可以用这个球面上的点来表示，这样规定的球面叫 **Riemann 球面**，而这样的变换叫做**球极平面射影**．

§2 复平面上的点集及区域

今后我们所研究的变量都是复变量，每一复变量有它变化的范围，下面先简单介绍有关平面点集的一些基本概念．

定义 2.1 平面上任意一点 z_0 的**邻域**定义为以 z_0 为中心，以某个正数 δ 为半径的圆内部所有的点构成的集合，记作 $N(z_0,\delta)$ 或 $N(z_0)$ 即 $N(z_0)=\{z: |z-z_0|<\delta\}$

我们称 $0<|z-z_0|<\delta$ 为 z_0 的**去心邻域**．

无穷远点的领域是以 $z=0$ 为中心，R 为半径的圆的外部，记作 $N(\infty,R)$，即 $N(\infty,R)=\{z: |z|>R\ (R\ 是常数)\}$.

定义 2.2 设 E 为平面上一点集，z_0 为 E 中任意一点，若存在 z_0 的一个邻域 $N(z_0)\subset E$，则称 z_0 为集合 E 的**内点**．

若对于某一点 z_0，存在一个领域 $N(z_0)$，使得 $N(z_0)$ 中的任何点都不属于集合 E，则称点 z_0 为集合 E 的**外点**．

若对于某一点 z_0，在 z_0 的任意小的领域内既含有 E 的点也含有不属于 E 的点，则称点 z_0 为集合 E 的**边界点**．

定义 2.3 若对于某一点 z_0（它不一定属于集合 E），它的任何领域 $N(z_0)$ 中总有属于 E 而异于 z_0 的点，则称点 z_0 为集合 E 的**极限点或聚点**．

定义 2.4 集合 E 的所有内点组成的集合称为 E 的**内部**记作 E^0，若 $E=E^0$，则称集合 E 为**开集**．

集合 E 的所有聚点组成的集合称为 E 的**导集**，记为 E'，属于 E 而不属于 E' 的点称为 E 的**孤立点**．

若 $E'\subset E$，则称集合 E 为**闭集**，集合 E 与 E' 的并集，称为集合 E 的**闭包**，记作 $\overline{E}$，即 $\overline{E}=E\cup E'$，显然 $\overline{E}$ 是闭集．

定义 2.5 集合 E 的所有边界点组成的集合称为 E 的**边界**，记作 ∂E，显然 $\partial E=\overline{E}-E^0$.

所有不属于 E 的点组成的集合称为 E 的**补集**，记作 CE.

我们可证得 E 是闭集的充要条件是它的补集为开集．事实上，若 E 为闭集，对任一点 $z\in CE$，即 $z\overline{\in}E$，按闭集的定义可知 $z\overline{\in}E'$ 即 z 不是 E 的聚点．因此存在一领域 $N(z,\varepsilon)$ 不含有 E 的点，即 $N(z,\varepsilon)\subset CE$，故 CE 为开集．

反之，若 CE 是开集，对任一点 $z\in CE$，则存在一邻域 $N(z,\varepsilon)\subset CE$，所以 $N(z,\varepsilon)$ 不包含 E 的点，即 $z\overline{\in}E'$，从而 $z\in CE'$ 由此可得 $CE\subset CE'$，因而 $E'\subset E$，故 E 为闭集．

我们还可证得下列结论(证明留作习题)

1° $z_0\in\overline{E}$ 的充要条件是对任一 $\varepsilon>0$，有 $N(z_0,\varepsilon)\cap E\neq\varphi$

2° $C\overline{E}=(CE)^0$，$\overline{CE}=CE^0$

定义 2.6 若集合 E 总可包含在原点的某一个邻域内，则称集合 E 为**有界集**，否则集合 E 称为**无界集**．

定义 2.7 平面上满足下列两个条件的点集 D 称为**区域**：

(1) D 是一个开集.

(2) D 是连通的，即 D 中任何两点都可用完全属于 D 的一条折线连接起来．

区域 D 与它的边界一起构成闭区域记作 $\overline{D}$

即
$$\overline{D}=D+\partial D.$$

注意 区域都是开的，不包含边界

例如 z 平面上以 z_0 为心，R 为半径的圆：$|z-z_0|<R$ 为圆形区域，z 平面上以 z_0 为心，R 为半径的闭圆：$|z-z_0|\leqslant R$ 为圆形闭区域．

为了给出单连通域与多连通域的定义，先介绍有关平面曲线的几个概念．设实连续函数 $x=x(t)$ 与 $y=y(t)$ 在 $a\leqslant t\leqslant b$ 上连

续，则它在平面上确定了一条**连续曲线**，如果令 $z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t)$，则这条曲线方程可写为 $z=z(t)$，$a\leqslant t\leqslant b$.

若 $x(t)$ 及 $y(t)$ 在 $[a,b]$ 上还有连续导数，且 $z'(t)=x'(t)+\mathrm{i}y'(t)\neq 0$ （$z'(a)$ 及 $z'(b)$ 分别为右、左导数），则称 $z=z(t)$ 为一条**光滑曲线**，有限条光滑曲线依次相接构成一条**分段光滑曲线**.

一条连续曲线 C：$z=z(t)$ $(a\leqslant t\leqslant b)$，$z(a)$ 与 $z(b)$ 分别称为 C 的起点与终点，对于满足 $a<t_1<b$，$a\leqslant t_2\leqslant b$ 的 t_1 与 t_2，当 $t_1\neq t_2$ 而有 $z(t_1)=z(t_2)$ 时，点 $z(t_1)$ 称为曲线 C 的**重点**，没有重点的连续曲线 C 称为**简单曲线**，若简单曲线 C 的起点与终点相重合，则称曲线 C 为**简单闭曲线**，显然圆是一条简单闭曲线，它把平面分成两个没有公共点的区域，其中一个有界，另一个无界，且这两区域都以已给的圆作为边界.

一般地有下面的 Jordan 定理（证明略）

任一条简单闭曲线把整个平面分成两个没有公共点的区域，一个有界的称它为内区域，另一个无界的称它为外区域，这两个区域都以已给的简单闭曲线作为边界.

现在我们可把区域加以分类.

定义 2.8 设 D 是平面上一个区域，若 D 内任何简单闭曲线的内区域中每一点都属于 D，则称 D 为**单连通区域**，不是单连通的区域称为**多连通区域**.

例 1 圆 $|z|<r$ 是一个单连通区域，而圆环 $0<r_1<|z|<r_2$ 就是多连通区域.

例 2 满足 $(1-\mathrm{i})z+(1+\mathrm{i})\bar{z}>0$ 的所有点 z 组成的集合是一个半平面，它是单连通无界区域，其边界为直线

$$(1-\mathrm{i})z+(1+\mathrm{i})\bar{z}=0 \quad 即 \quad x+y=0.$$

例 3 满足 $0<\arg(z-1)<\dfrac{\pi}{4}$ 及 $2<\operatorname{Re}z<3$ 的所有点 z 所组成的集合是以直线 $\operatorname{Re}z=2$ 与 $\operatorname{Re}z=3$ 为左、右底，以直线 $\arg(z-1)=\dfrac{\pi}{4}$ 和实轴为上下腰的一个梯形（不包括周界）它是单

连通有界区域．

§3 复变函数及其极限与连续性

定义 3.1 设 E 为复平面 Z 上的点集，若 E 内每一个复数 z 按一定规律对应一个确定的复数 w，则称在 E 上确定了一个**单值函数** $w=f(z)$，若对于自变量 z 有几个或无穷多个复数 w 与之对应，则称 $w=f(z)$ 为**多值函数**．

集合 E 称为函数 $f(z)$ 的**定义域**，w 值的全体所成集 $A=f(E)$ 称为函数 $f(z)$ 的**值域**．

例如 $w=z^2$，$w=\dfrac{z+1}{z-1}$ $(z\neq1)$ 均为 z 的单值函数，

$w=\sqrt[n]{z}$ 为 z 的多值函数，它有 n 个分支，

$w=\mathrm{Arg}z$ 为 z 的多值函数，它有无穷多个分支．

在以后的讨论中，如无特别声明，我们讲的函数均为单值函数．

如果用 Z 平面上的点表示自变量 z 的值，而用另一个 w 平面上的点表示函数 w 的值，则函数 $w=f(z)$ 在几何上可看作是把平面上的一个点集 E 变到 w 平面上的一个点集 A 的**映射**或**变换**，在映射 $w=f(z)$ 下．w 称为 z 的**象**，而 z 称为 w 的**原象**．

若 $f(E)=A$，则称 f 是 E 到 A 上的映射．

若 $f(E)\subset A$，则称 f 是 E 到 A 内的映射.

若 $w=f(z)$ 把不同的点映射成不同的点，即 $f(z_1)=f(z_2)$ 蕴含着 $z_1=z_2$，则称映射 f 是**一一的**或**双方单值的**．在这种情况下，$w=f(z)$ 有一个定义在 $f(E)$ 上的**反函数**或**逆映射**记作 $z=f^{-1}(w)$.

例 1 函数 $w=z^2$ 把 Z 平面上的等轴双曲线 $x^2-y^2=c_1$ 与 $2xy=c_2$ 分别映射成 w 平面上的两族平行直线

$$u=c_1 \quad 与 \quad v=c_2.$$

由于 $w=z^2=x^2-y^2+2xy\mathrm{i}$，从而 $u=x^2-y^2$，$v=2xy$.

由此即得上述结论.

例 2 函数 $w=z+\alpha$ 确定了从 Z 平面到 w 平面的一个双方单值映射,若把 z 及它的象作在同一复平面上,则这一映射确定 Z 平面内的一个平移.

例 3 映射 $w=z_1z_2$ 可看作一个旋转变换与一个相似变换叠合而成. 事实上,设 $z_1=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}$，$z_2=r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$,把 z_1,z_2 与 w 都作在同一复平面上,先作映射 $w_1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}z_2=r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}$，$w_1$ 与 z_2 的模相同,它的幅角为 z_2 的辐角加上 θ_1,这是一个旋转变换,再作映射 $w=r_1w_1$,这是一个以原点为中心的相似变换.

定义 3.2 设函数 $w=f(z)$在点集 E 上有定义,z_0 为 E 的一个聚点,若存在一复数 w_0,使得对于任意给定的实数 $\varepsilon>0$,都存在实数 $\delta=\delta(\varepsilon)$,使得当 $z\in E$ 及 $0<|z-z_0|<\delta$ 时,就有 $|f(z)-w_0|<\varepsilon$,则称当 z 趋近于 z_0 时,$f(z)$趋近于**极限** w_0,记作 $\lim\limits_{\substack{z\to z_0\\ z\in E}}f(z)=w_0$

定理 3.1 设 E 是复平面上的点集. z_0 是 E 的聚点,$z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$,而函数 $w=f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$定义在 E 上,$w_0=u_0+\mathrm{i}v_0$ 则$\lim\limits_{\substack{z\to z_0\\ z\in E}}f(z)=w_0$ 的充要条件是

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}u(x,y)=u_0,\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}v(x,y)=v_0.$$

事实上,由不等式

$$|u(x,y)-u_0|\leqslant|f(z)-w_0|,$$
$$|v(x,y)-v_0|\leqslant|f(z)-w_0|,$$

以及

$$|f(z)-w_0|\leqslant|u(x,y)-u_0|+|v(x,y)-v_0|,$$

根据极限的定义,立即可看出定理的正确性.

由此可见,关于实变函数的极限的一些简单结果,例如,极限

的唯一性，关于两函数的四则运算的一些结论都可不加改变地推广到复变函数．

下面引入复函数连续的概念．

定义 3.3 设 E 为复平面上的点集，z_0 是 E 的一个聚点，$z_0\in E$，函数 $f(z)$ 在集合 E 上有定义，如果对于任给 $\varepsilon>0$，存在数 $\delta>0$ 使得当 $z\in E$ 且满足 $|z-z_0|<\delta$ 时，总有 $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$，则称函数 $w=f(z)$ 沿着集合 E 在点 $z=z_0$ 处**连续**．

若 $f(z)$ 在 E 上每一点均连续，则称 $f(z)$ 在集合 E 上连续．如同实变连续函数的性质，在 z_0 连续的两个复函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的和、差、积、商（分母在 z_0 不等于零）在 z_0 处仍连续；若函数 $h=g(z)$ 在 z_0 连续，函数 $w=f(h)$ 在 $h_0=g(z_0)$ 处连续，则复合函数 $w=f[g(z)]$ 在 z_0 处连续．

定义 3.4 设函数 $f(z)$ 在集合 E 上有定义，若任给 $\varepsilon>0$，可找到一个与 ε 有关，但与 z 无关的正数 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使得 $z_1,z_2\in E$ 且 $|z_1-z_2|<\delta$ 时，有 $|f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon$，则称函数 $f(z)$ 在 E 上**一致连续**．

如同实变一致连续函数的性质，不难证明下面定理

定理 3.2 设函数 $f(z)$ 在有界闭集 E 上连续，则

(1) 函数 $f(z)$ 在 E 上一致连续，

(2) 函数 $f(z)$ 在 E 上有界，

(3) 函数 $f(z)$ 在 E 上达到它的最大模与最小模.

例 1 设 $f(z)=\mathrm{e}^z$，其中 $z=x+\mathrm{i}y$，问当 $z\to\infty$ 时，$f(z)$ 有无极限（包括广义极限）？

我们考虑 z 在实轴上变动，即令 $y=0$

则 $$f(z)=\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)=\mathrm{e}^x.$$

当 $x\to+\infty$ 时，$|f(z)|=\mathrm{e}^x\to+\infty$，当 $x\to-\infty$ 时 $|f(z)|=\mathrm{e}^x\to0$.

因此，当 $z\to\infty$ 时，$f(z)$ 没有极限．

例 2 设函数 $f(z)$ 在 z_0 连续，且 $f(z_0)\neq0$，证明存在 z_0 的一

个邻域，在此邻域内 $f(z)\neq 0$.

证 因为 $f(z_0)\neq 0$，所以 $|f(z_0)|=\varepsilon_0>0$，又因 $f(z)$在 z_0 连续，所以存在 $\delta>0$，当 $|z-z_0|<\delta$ 时，有 $|f(z)-f(z_0)|<\frac{\varepsilon_0}{2}$.

故当 $|z-z_0|<\delta$ 时，有

$$|f(z)| \geqslant |f(z_0)| - |f(z) - f(z_0)| > \frac{\varepsilon_0}{2} > 0 .$$

从而 $f(z)$在 $|z-z_0|<\delta$ 内不等于 0.

第二章　解析函数

解析函数是复变函数研究的主要对象，在这一章中，首先引入解析函数概念，讨论复变函数解析的充要条件．然后介绍导数的几何意义及保形变换概念，最后研究一些常用的初等解析函数．

§1　解析函数概念

我们先给出复变函数的导数、微分的定义，它们在形式上与实变一元函数的导数与微分的定义一致，因此微分学中几乎所有的基本公式对复变函数亦适用．

定义 1.1　设函数 $w=f(z)$ 在区域 D 内定义，z_0 为 D 中的一点，若 $\lim\limits_{\substack{z\to z_0\\ z\in D}}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ 存在，则称 $f(z)$ 在 z_0 **可导或可微**，这个极限值称为 $f(z)$ 在 z_0 的**导数**，记作 $f'(z_0)$ 即

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,. \tag{1}$$

若记 $\Delta z=z-z_0$，$\Delta f=f(z)-f(z_0)=f(z_0+\Delta z)-f(z_0)$，$\rho(\Delta z)=\dfrac{\Delta f}{\Delta z}-f'(z_0)$.

则由(1)式知，$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\rho(\Delta z)=0$，所以若 $f(z)$ 在点 $z=z_0$ 可导，则在点 z_0 的邻域内，$f(z)$ 写成

$$f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=f'(z_0)\Delta z+\rho(\Delta z)\Delta z.$$

$f'(z_0)\Delta z$ 是 Δf 的主要线性部分，称它为 $f(z)$ 在点 $z=z_0$ 的**微分**，记作 $\mathrm{d}f$，当 $f(z)=z$，$f'(z_0)=1$，$\mathrm{d}z=\Delta z$ 则 $\mathrm{d}f=f'(z_0)\mathrm{d}z$　即

$$f'(z_0)=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}.$$

显然在 z_0 有导数的函数一定在 z_0 连续，反之若 $f(z)$在点 z_0 连续，但 $f(z)$未必在点 z_0 可导．

应当注意在导数的定义中，$z\to z_0$ 的方式是任意的，极限值存在的要求与 $z\to z_0$ 的方式无关．

例 1 研究 $f(z)=\mathrm{Re}z$ 的可导性

显然 $f(z)$在有穷复平面 C 上是连续的，现在我们来讨论$f(z)$在 C 上是否可导，设 z_0 为任一复数，$z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$

若取 $z=x+\mathrm{i}y_0$，则 $\Delta z=z-z_0=x-x_0$，

$$\frac{\Delta f}{\Delta z}=\frac{\mathrm{Re}(z-z_0)}{z-z_0}=\frac{x-x_0}{x-x_0}=1.$$

若取 $z=x_0+\mathrm{i}y$，则 $\Delta z=z-z_0=\mathrm{i}(y-y_0)$.

$\frac{\Delta f}{\Delta z}=0$ 所以 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}$不存在，即 $f(z)$在 C 上处处不可导．

例 2 函数 $f(z)=z^n$(n 为正整数)在复平面 C 上处处可导且 $(z^n)'=nz^{n-1}$

事实上，设 z 为任意固定点，给其增量 Δz，则据导数定义有

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)^n-z^n}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta z}\left(nz^{n-1}\Delta z+\frac{n(n-1)}{2!}z^{n-2}(\Delta z)^2+\cdots+(\Delta z)^n\right)$$

$$=nz^{n-1}.$$

定义 1.2 若函数 $f(z)$在 z_0 的邻域 $N(z_0)$内处处可导，则称 $f(z)$在 z_0 **解析**．若 $f(z)$在区域 D 内每一点解析，则称 $f(z)$在 D 内解析，或称 $f(z)$是 D 内的一个**解析函数**，如果 $f(z)$在 z_0 不解析，则称 z_0 为 $f(z)$的**奇点**．

由定义可知，函数在区域内解析与在区域内可导是等价的，但是函数在一点处解析与在一点处可导是两个不等价的概念，函数在一点处可导，不一定在该点解析．

注意“解析”有时亦称为“全纯”或“正则”

解析函数的求导法则

(1) 若 $f(z)$, $g(z)$在区域 D 内解析,则其和、差、积、商(分母不为零)在 D 内亦解析且

$$[f(z)\pm g(z)]'=f'(z)\pm g'(z),$$

$$[f(z)g(z)]'=f'(z)g(z)+f(z)g'(z),$$

$$\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]'=\frac{f'(z)g(z)-g'(z)f(z)}{[g(z)]^2}.\ (g(z)\neq 0)$$

(2) 设 $\zeta=f(z)$在 z 平面的区域 D 内解析,$w=F(\zeta)$在 ζ 平面的区域 D_1 内解析,并且当 $z\in D$ 时,$\zeta=f(z)\in D_1$, 则 $w=F[f(z)]$在 D 内解析,且

$$\frac{\mathrm{d}F[f(z)]}{\mathrm{d}z}=\frac{\mathrm{d}F(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta}\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z}=F'[f(z)]\cdot f'(z).$$

(3) 设函数 $w=f(z)$在区域 D 内解析,且 $f'(z)\neq 0$, $z\in D$, 设 $z=\psi(w)$是函数 $f(z)$的单值反函数,且在 f 的值域 A 上连续,则 $z=\psi(w)$在 A 上解析,且 $\psi'(w)=\dfrac{1}{f'[\psi(w)]}$.

例 3 据求导法则及例 2 可知,z 的多项式 $P(z)=\alpha_0+\alpha_1 z+\cdots+\alpha_n z^n$ 在整个复平面上解析.

有理函数$\dfrac{P(z)}{Q(z)}$除 $Q(z)=0$ 的点外在整个复平面上处处解析.

例 4 函数 $f(z)=z\mathrm{Re}z$ 只有在 $z=0$ 处才有导数.

事实上,在 $z=0$ 处,

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta z\mathrm{Re}\Delta z}{\Delta z}=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=0,$$

所以

$$f'(z)\big|_{z=0}=0.$$

当 $z\neq 0$ 时,

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)\mathrm{Re}(z+\Delta z)-z\mathrm{Re}z}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{z\mathrm{Re}\Delta z+\Delta z\mathrm{Re}(z+\Delta z)}{\Delta z,},$$

令 $z=x+\mathrm{i}y$, $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$. 我们让 z 以两种特殊方式趋于 z_0,若令 $y=y_0$,让 $x\to x_0$则

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\mathrm{i}y)\Delta x+\Delta x(x+\Delta x)}{\Delta x}=2x_0+\mathrm{i}y_0.$$

若令 $x=x_0$, 让 $y\to y_0$则

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{(x+\mathrm{i}y)\cdot 0+\mathrm{i}\Delta y\cdot x}{\mathrm{i}\Delta y}=x_0.$$

这两个极限值当 $z\neq 0$ 时是不相等的. 因此 $z\mathrm{Re}z$ 在 $z\neq 0$ 时,没有极限,从而复函数 $f(z)=z\mathrm{Re}z$ 没有导数,值得我们注意的:$f(z)=z\mathrm{Re}z=x^2+\mathrm{i}xy$ 其实部 $u(x,y)=x^2$ 与虚部 $v(x,y)=xy$ 均有任意阶连续偏导数.

这一例子说明,虽然复变函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$是由其实部及虚部作为两个变量 x 与 y 的实函数来定义的,但由函数 $u(x,y)$及 $v(x,y)$的可微性并不能推出 $f(z)$的可微性,为此下面我们要研究复函数 $f(z)$在点 z 可微的充要条件.

§2 柯西-黎曼(Cauchy-Riemann)方程

定理 2.1 设函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$在区域 D 内定义,则 $f(z)$在点 $z=x+\mathrm{i}y\in D$ 可微的充分必要条件是在点 $z=x+\mathrm{i}y$ 处,$u(x,y)$及 $v(x,y)$可微且

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1}$$

证 必要条件:设 $f(z)$在点 $z=x+\mathrm{i}y$ 有导数 $\alpha=a+\mathrm{i}b$,则

$$f(z+\Delta z)-f(z)=\alpha\Delta z+\rho(\Delta z)\Delta z, \tag{2}$$

其中 $\rho(\Delta z)$满足$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\rho(\Delta z)=0$.

令 $f(z+\Delta z)-f(z)=\Delta u+\mathrm{i}\Delta v, \rho(\Delta z)=\rho_1+\mathrm{i}\rho_2$ 比较(2)式两边的实、虚部得到

$$\Delta u = a\Delta x - b\Delta y + \rho_1\Delta x - \rho_2\Delta y,$$
$$\Delta v = b\Delta x + a\Delta y + \rho_2\Delta x + \rho_1\Delta y.$$

由于

$$\lim_{\Delta z\to 0}\rho(\Delta z) = 0,$$

所以

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\rho_1 = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\rho_2 = 0.$$

由数学分析中的二元函数可微定义知 $u(x,y)$ 及 $v(x,y)$ 可微，且有 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=a$；$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=-b$.

充分条件：设 $u(x,y)$ 及 $v(x,y)$ 在点 $z=x+\mathrm{i}y$ 可微，且满足(1)不妨设 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=a, \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=-b$，则

$$\Delta u = a\Delta x - b\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y, \tag{3}$$
$$\Delta v = b\Delta x + a\Delta y + \varepsilon_3\Delta x + \varepsilon_4\Delta y. \tag{4}$$

此外 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\varepsilon_k=0$，$k=1,2,3,4$.

将(3)与(4)式乘以 i 相加得到

$$f(z+\Delta z)-f(z)$$
$$= (a+\mathrm{i}b)\Delta z + (\varepsilon_1+\mathrm{i}\varepsilon_3)\Delta x + (\varepsilon_2+\mathrm{i}\varepsilon_4)\Delta y,$$

所以

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = a+\mathrm{i}b.$$

即

$$f'(z) = u_x(x,y) + \mathrm{i}v_x(x,y).$$

条件(1)式称为**柯西-黎曼条件**或**柯西-黎曼方程**简称 C-R 方程.

由定理 2.1 立即可得

定理 2.2 设函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在区域 D 内定义，$f(z)$ 在区域 D 内解析的充分必要条件是 $u(x,y)$ 及 $v(x,y)$ 在

D 内可微，且在 D 内满足 C-R 方程．

下面举几个例子讨论函数的解析性．

例 1 函数 $f(z)=z\mathrm{Re}z=x^2+\mathrm{i}xy$，在平面上处处不解析，事实上，由于 $u(x,y)=x^2$，$v(x,y)=xy$，所以$\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}=y$，$\dfrac{\partial v}{\partial y}=x$，只有 $x=y=0$ 这一点才满足 C-R 方程，在其它处都不满足，因此它不是解析函数．

例 2 函数 $f(z)=\mathrm{e}^z$ 在平面上处处解析．

事实上，$\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)$

$$u(x,y)=\mathrm{e}^x\cos y,\qquad v(x,y)=\mathrm{e}^x\sin y.$$

u,v 在平面上有连续偏导数，所以 u,v 可微，且$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=\mathrm{e}^x\cos y$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\mathrm{e}^x\sin y$，C-R 方程满足．

例 3 函数 $f(z)=|z|^2$ 在 $z=0$ 处可微，但处处不解析．

事实上，$f(z)=|z|^2=x^2+y^2$，则 $u(x,y)=x^2+y^2$，$v(x,y)=0$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial v}{\partial x}=0;\ \frac{\partial u}{\partial y}=2y,\ \frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

只有在 $z=0$ 处满足 C-R 方程，所以在 $z=0$ 处可微但处处不解析．

由 C-R 条件我们得出下面结论：

推论 2.1 若 $f(z)$在区域 D 内解析，且 $f'(z)=0\ (z\in D)$，则在 D 内 $f(z)=$常数．

证 由假设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$在 D 内每一点可微，且 $f'(z)=u_x+\mathrm{i}v_x=v_y-\mathrm{i}u_y=0$，则在 D 内必有 $u_x=u_y=0$，$v_x=v_y=0$，因此在 D 内，u,v 必是常数，即在 D 内 $f(z)$为常数．

推论 2.2 若 $f(z)$在区域 D 内解析，且 $f'(z)\neq 0$，$(z\in D)$ 则两曲线族 $u(x,y)=C_1$ 与 $v(x,y)=C_2$，其中 C_1，C_2 为常数，是 D 内两组正交曲线族．

证 因为 $f'(z)\neq 0(z\in D)$故在(x,y)点,u_x 与 v_x 必不全为零,首先设 $u_x\neq 0,v_x\neq 0$,由 C-R 条件可知还必有 $v_y\neq 0,u_y\neq 0$ 曲线 $u(x,y)=c_1$ 的斜率,$0=\mathrm{d}u=u_x\mathrm{d}x+u_y\mathrm{d}y$ 求得 $k_u=-\dfrac{u_x}{u_y}$, 同理求得 $v(x,y)=c_2$ 的斜率, $k_v=-\dfrac{v_x}{v_y}$, 故在点(x,y)有

$$k_u\cdot k_v=\frac{u_x}{u_y}\cdot\frac{v_x}{v_y}=\frac{v_y}{-v_x}\cdot\frac{v_x}{v_y}=-1,$$

所以两曲线族在点(x,y)处正交.

若 u_x 与 v_x 中有一个为零,不妨设 $u_x=0$,此时必有 $v_y=0$,由于 $f'(z)=u_x+\mathrm{i}v_x=v_y-\mathrm{i}u_y\neq 0$,从而 $u_y\neq 0$, $v_x\neq 0$,于是 $k_u=0$, $k_v=\infty$.

因此过交点的两条切线,必然一条为水平切线,另一条为铅直切线,它们仍在交点处正交,其它情况类似可证.

§3 导数的几何意义及保形变换概念

首先我们推导出以下结论:设 C 是一条有向连续曲线,其参数方程为 $z=z(t)$, $a\leqslant t\leqslant b$,$z(t_0)=z_0$, $t_0\in[a,b]$, 若$z'(t_0)\neq 0$,则曲线 C 在$z=z_0$处必有切线,且此切线与正实轴间的夹角为 $z'(t_0)$的辐角$\arg z'(t_0)$. 事实上,如图 3.1,作通过曲线 C 上之点$z_0=z(t_0)$及 $z_1=z(t_1)$的割线,由于割线的方向与向量$\dfrac{z_1-z_0}{t_1-t_0}$的方向一致可看出只要当 $t_1\to t_0$ 时,向量$\dfrac{z_1-z_0}{t_1-t_0}$与实轴的夹角 $\arg\dfrac{z_1-z_0}{t_1-t_0}$连续变动,趋近于某一极限,则当 $z_1\to z_0$ 时,割线的极限位置就是曲线

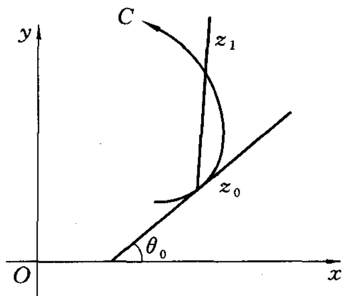


图 3.1

C 在 $z=z_0$ 处的切线、由光滑曲线的条件知$\lim\limits_{t_1\to t_0}\dfrac{z-z_0}{t_1-t_0}=z'(t_0)\neq 0$，因此存在下列极限：

$$\lim_{t_1\to t_0}\arg\frac{z_1-z_0}{t_1-t_0}=\arg z'(t_0). \tag{1}$$

这就是曲线 C 在 z_0 处切线与实轴的夹角．

下面我们说明 $\arg f'(z_0)$的几何意义：

设函数 $w=f(z)$ 在区域 D 内解析，z_0 为 D 内的一点，且 $f'(z_0)\neq 0$，$f(z)$把简单光滑曲线 C 映射成过 $w_0=f(z_0)$的一条简单曲线 Γ：$w=f(z(t))$ $(a\leqslant t\leqslant b)$

由于$\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}=f'(z(t))z'(t)$，所以 Γ 也是一条光滑曲线，它在 w_0 的切线与实轴的夹角是

$$\arg f'(z(t_0))z'(t_0)=\arg f'(z_0)+\arg z'(t_0). \tag{2}$$

由(1)式与(2)式知道 Γ 在 w_0 处切线与实轴的夹角及 C 在 z_0 处切线与实轴的夹角相差为 $\arg f'(z_0)$，这一数值与曲线 C 的形状及方向无关．由此可得以下结论：

导数 $f'(z_0)\neq 0$ 的辐角 $\arg f'(z_0)$是曲线 C 经过映射 $w=f(z)$后在 z_0 处的**转动角**，并且转动角的大小与方向跟曲线 C 的形状与方向无关．

设在 D 内过 z_0 还有一条简单光滑曲线 C_1：$z=z_1(t)$，函数 $w=f(z)$把它映射成为一条简单光滑曲线 Γ_1：$w=f(z_1(t))$，则 C_1 及 Γ_1 在 z_0 及 w_0 处切线与实轴的夹角分别是

$$\arg z_1'(t_0)\ \text{及}\ \arg f'(z_1(t_0))z_1'(t_0)=\arg f'(z_0)+\arg z_1'(t_0). \tag{3}$$

比较(2)与(3)式就可看出在 w_0 处曲线 Γ 到曲线 Γ_1 的夹角恰好等于在 z_0 处曲线 C 到 C_1 的夹角，如图 3.2，即

$$\begin{aligned}&\arg f'(z_1(t_0))z_1'(t_0)-\arg f'(z(t_0))z'(t_0)\\=&\arg z_1'(t_0)-\arg z'(t_0).\end{aligned}$$

由上所述，我们可得出以下结论：相交于点 z_0 的任何两曲线

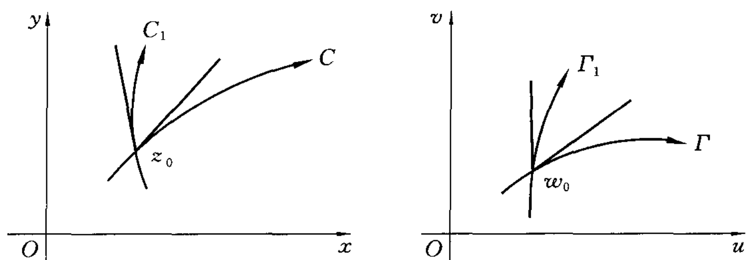


图 3.2

C 与 C_1 间的夹角，在其大小和方向上都等同于经过映射 $w=f(z)$ 后跟 C 与 C_1 对应的曲线 Γ 与 Γ_1 之间的夹角.

我们再来解释函数 $f(z)$在 z_0 的导数的模 $|f'(z_0)|$的几何意义，因为

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}.$$

所以，若取过 z_0 的任一简单光滑曲线 C，它在映射 $f(z)$下的象曲线为一简单光滑曲线 Γ，则

$$|f'(z_0)|=\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in C}}\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}=\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in C}}\frac{|w-w_0|}{|z-z_0|}.$$

上式表明象点之间的距离与原象之间的距离之比的极限与曲线 C 的形状及方向无关，我们称 $|f'(z_0)|$为映射 $f(z)$在 $z=z_0$ 的**伸缩率**. 所以导数模的几何意义是：

$|f'(z_0)|$是经过映射 $w=f(z)$后通过点 z_0 的任何曲线 C 在 z_0 的伸缩率，它与曲线 C 的形状及方向无关，所以这种映射又具有伸缩率的不变性.

综上所述，我们有下面的定理：

定理 3.1 设函数 $w=f(z)$在 $z=z_0$ 处解析，且 $f'(z_0)\neq 0$，则它有两个性质：

(1) 旋转角的不变性，且保持方向不变，简称保角性

(2) 伸缩率的不变性．

定义 3.1 若函数 $w=f(z)$ 在 $z=z_0$ 的邻域上有定义，且具有保角性及伸缩率的不变性，则称函数 $w=f(z)$ 在 $z=z_0$ 处实现保形变换或称为**共形映射**，这种映射亦可称为**第一类保形变换**．

若函数 $w=f(z)$ 在区域 D 内每一点上都实行保形变换，则称函数 $f(z)$ 在区域 D 内实现保形变换．

定义 3.2 若函数 $w=f(z)$ 在区域 D 上每一点都保持伸缩率不变性，且保持夹角的数量不变，但方向相反，则称它为**第二类保形变换**．

例如函数 $f(z)=\bar{z}$ 在全平面上实现第二类保形变换．事实上，对任意的 z_0，有 $\lim\limits_{z\to z_0}\left|\frac{\bar{z}-\bar{z}_0}{z-z_0}\right|=1$．因此它保持伸缩率不变，另外这个变换将 z 平面上的任何曲线变到一条关于实轴对称的曲线，所以它保持两条曲线间的夹角数量不变，而旋转方向正好相反．

§4 初等解析函数

我们把数学分析中一些常用的初等函数推广到复变函数情形，研究这些初等函数的性质及其所构成的映射．

4.1 指数函数

定义 4.1 对任意复数 $z=x+\mathrm{i}y$，我们定义**指数函数** e^z 为

$$w=\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y).$$

根据定义我们可得出指数函数下列性质：

(1) $|\mathrm{e}^z|=\mathrm{e}^x$, $\mathrm{Arg}\,\mathrm{e}^z=y+2k\pi$. $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

(2) 对任何复数 z，$\mathrm{e}^z\neq0$.

(3) 当 $z=x\in R$ 时，$\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^x$.

(4) $w=\mathrm{e}^z$ 在复平面上解析，且 $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}=\mathrm{e}^z$.

这性质据§2 例 2 可得，再由性质(2)与(4)可知 $w=\mathrm{e}^z$ 在全

复平面上实现保形变换.

(5) 对任意的 z_1,z_2 有 $e^{z_1}e^{z_2}=e^{z_1+z_2}$,事实上,令 $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$ 则

$$\begin{aligned} e^{z_1}e^{z_2} &= e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1)e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2) \\ &= e^{x_1+x_2}[\cos(y_1 + y_2) + i\sin(y_1 + y_2)] \\ &= e^{z_1+z_2}. \end{aligned}$$

(6) $w=e^z$ 是以 $2\pi i$ 为周期的周期函数,

事实上 $e^{z+2\pi i}=e^z e^{2\pi i}=e^z$. 同样对任何整数 k,有 $e^{z+2k\pi i}=e^z$.

(7) 极限 $\lim\limits_{z\to\infty} e^z$ 不存在,所以 e^∞ 无意义.

在指数函数的定义中若令 $x=0$ 就得到欧拉公式

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y.$$

下面我们研究映射 e^z 的特点.

定义 4.2 设 $w=f(z)$ 在区域 D 内解析,若 D 内至少存在不同的两点 z_1 及 z_2,使 $f(z_1)=f(z_2)$,则称函数 $f(z)$ 在 D 内是**多叶**的,若 $f(z)$ 为 D 上双方单值映射,则称函数 $f(z)$ 为**单叶解析函数**,称 D 为 $f(z)$ 的**单叶性区域**.

现在我们来求出 e^z 的单叶性区域:设 $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$, $z_1\neq z_2$,但 $e^{z_1}=e^{z_2}$ 即 $e^{x_1}e^{iy_1}=e^{x_2}e^{iy_2}$,由此得 $x_1=x_2$, $y_1=y_2+2k\pi$ ($k=0, \pm1, \pm2\cdots$),所以不包含满足 $z_1-z_2=2k\pi i$ 的 z_1,z_2 的区域都可作为 e^z 的单叶性区域,为简便起见,我们取平行于实轴的区域 $2k\pi<y<2(k+1)\pi$,其中 k 为任意整数,作为 e^z 的的单叶性域,由于 e^z 有周期 $2\pi i$,我们只要研究当 z 在由 $0<\mathrm{Im}z<2\pi$ 所定义的带形 B 中变化时,$w=e^z$ 的映射性质.

$w=e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$, 它将直线 l: $y=y_0$, $-\infty<x<+\infty$ 变到 w 平面上的射线 l_1: $\arg w=y_0$. 同时 $w=e^z$ 把直线段 $x=x_0$, $0<y<2\pi$ 变为圆周 $|w|=e^{x_0}$ (去掉 $w=e^{x_0}$ 这一点)(图 4.1),因此指数函数 e^z 把带域 B:$0<y<2\pi$ 单叶地变为 w 平面上除去原点及正实轴的域,将直线 $y=0$ 变为正实轴的上边沿,将直

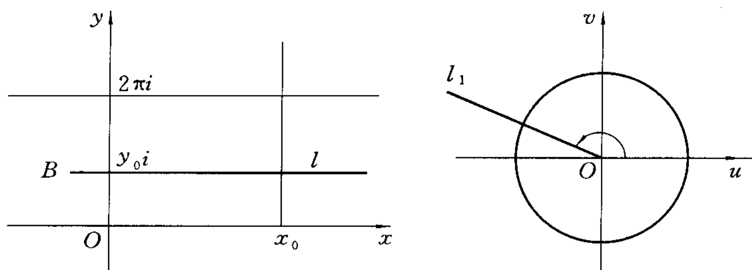


图 4.1

线 $y=2\pi$ 变为正实轴的下边沿，将带域 $0<y<\pi$ 变为上半平面，将带域 $\pi<y<2\pi$ 变为下半平面.

4.2 对数函数

定义 4.3 指数函数的反函数称为**对数函数**，即 $e^w=z(z\neq0,\infty)$的反函数称为对数函数，记为 $w=\mathrm{Ln}z$.

令 $w=u+iv$, $z=re^{i\theta}$, 则 $e^{u+iv}=re^{i\theta}$, 从而 $e^u=r$, $v=\theta+2k\pi$, k 为整数，于是

$$\mathrm{Ln}z=\ln r+i(\theta+2k\pi)=\ln|z|+i\mathrm{Arg}z.$$

相应于 Arg$z$ 的主值，我们把

$$\ln|z|+i\arg z(0<\arg z<2\pi),$$

定义为 Lnz 的**主值**，记作 ln$z$. 于是

$$w=\mathrm{Ln}z=\ln z+2k\pi i.$$

所以任何不是零的复数有无穷多个对数，其中任意两个相差 $2\pi i$ 的整数倍.

关于积和商的对数，有下列法则，设 z_1,z_2 为非零复数，则

(1) $\mathrm{Ln}(z_1z_2)=\mathrm{Ln}z_1+\mathrm{Ln}z_2$,

事实上

$$\begin{aligned}\mathrm{Ln}(z_1z_2)&=\ln|z_1z_2|+i\mathrm{Arg}(z_1z_2)\\&=\ln|z_1|+\ln|z_2|+i(\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2)\end{aligned}$$

$$=\mathrm{Ln}z_1+\mathrm{Ln}z_2.$$

(2) $\mathrm{Ln}\,\dfrac{z_1}{z_2}=\mathrm{Ln}z_1-\mathrm{Ln}z_2$,

事实上

$$\begin{aligned}\mathrm{Ln}\,\frac{z_1}{z_2}&=\ln\left|\frac{z_1}{z_2}\right|+\mathrm{i}\mathrm{Arg}\,\frac{z_1}{z_2}\\&=\ln|z_1|-\ln|z_2|+\mathrm{i}(\mathrm{Arg}z_1-\mathrm{Arg}z_2)\\&=\mathrm{Ln}z_1-\mathrm{Ln}z_2.\end{aligned}$$

如果我们在有穷平面 z 上去掉正实轴(包括 0),这样得到的带域记为 D,则在 D 内 $\mathrm{Arg}z$ 的主值 $\arg z$ 是一个单值连续函数,则函数 $w_k(z)=(\mathrm{Ln}z)_k=\ln|z|+\mathrm{i}(\arg z+2k\pi)$, $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$把 D 单叶地映为平行于实轴的带域 B_k:

$$B_k:\ (2k)\pi<v<(2k+2)\pi\ .$$

它们都是指数函数 $z=\mathrm{e}^w$ 的反函数,且在域 D 内,z 的模与辐角都是连续变化的,因此 $w_k(z)$在 D 内连续. 根据第一节反函数的求导法则知:

$$w_k'(z)=\frac{1}{\mathrm{e}^{w_k(z)}}=\frac{1}{z}\ .$$

注意,有时为了方便起见,我们亦可将有穷平面 z 上去掉负实轴(包括 0)作为上面讨论中的域 D.

从上面的讨论可知,$w=\mathrm{Ln}z$ 在 D 内可分解为无穷多个单值连续函数,它们都是 $\mathrm{Ln}z$ 在 D 内的单值连续分支,并且在这样的域内不存在绕原点的简单闭曲线. 当点 z 从 z_0 开始,沿 D 内任一条简单闭曲线 C 绕一圈回到 z_0 时,$\arg z$ 连续变化地回到原来的值,相应的 $w_k(z)$在 w 平面也作出一条简单闭曲线. 如果我们不将有穷平面 z 沿着正实轴或负实轴割开,即 D 就是除去点 $z=0$ 的 z 平面,在这种域内,就存在绕原点 $z=0$ 的简单闭曲线 $\widetilde{C}$,当 z 从 $\widetilde{C}$ 上的一点 z_0 沿 $\widetilde{C}$ 按逆时针方向绕一圈回到 z_0 时,z 的辐角就增加了 2π,因此 $w_k(z)$就得到增量 $2\pi\mathrm{i}$,即 $w_k(z)$从 $w_k(z_0)$连续地变为 $w_{k+1}(z_0)$而不再回到原来的值 $w_k(z_0)$(图 4.2). 因此在这样

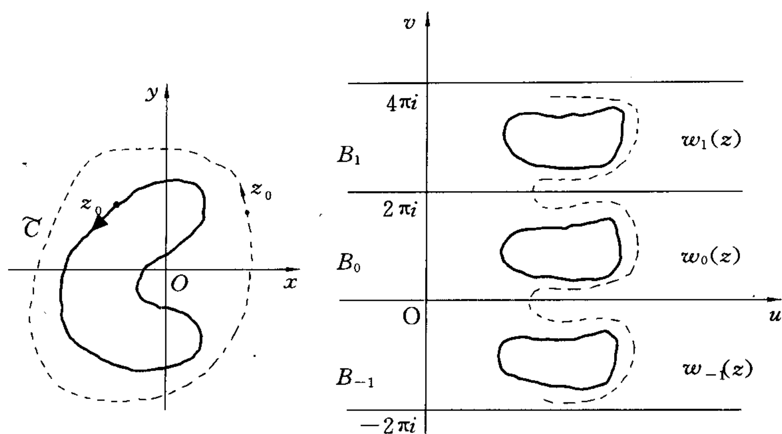


图 4.2

的域内就不可能分出 Lnz 的单值连续分支，我们把 $z=0$ 称为 Lnz 的**支点**，由于 D 内任一条绕原点的简单闭曲线，我们亦可把它看作是绕 $z=\infty$ 的简单闭曲线，因此 $z=\infty$，也是 Lnz 的支点．

一般地当 z 绕某一点一圈时，多值函数从一个分支变为另一个分支，我们把这点称为这个**多值函数的支点**，连结支点的割线称为**支割线**．顺便指出，Lnz 的单值连续分支 $w_k(z)$ 在割线上是不连续的，若选取负实轴为割线，则 $w_k(z)$ 可扩充为直到负实轴（除去 0）的上边沿及下边沿连续的函数．

4.3 幂函数

定义 4.4 对任意的复数 α，当 $z\neq0$ 时，定义**幂函数** $w=z^\alpha$ 为

$$w = z^\alpha = e^{\alpha \mathrm{Ln} z}.$$

当 $z=0$ 时，只有在 α 是正实数时，才规定 $z^\alpha=0$.

由于 Lnz 的多值性，所以一般来说，z^α 是一个多值函数．

由于 $\mathrm{Ln}z = \ln z + 2k\pi i$，$k$ 为任意整数，所以 $w = z^\alpha = e^{\alpha\ln z} \cdot e^{\alpha 2k\pi i}$.

由此可见对同一 $z\neq0$，z^α 的不同数值的个数等于不同数值的

因子 $e^{\alpha\cdot 2k\pi i}$ 的个数．幂函数有下列几个性质：

（1）当 α 是整数，则 $e^{\alpha 2k\pi i}=1$ 这时 z^{α} 是单值的．

（2）当 α 是有理数，其既约分数表示式 $\alpha=\frac{m}{n}$，$n\geqslant 1$，则 z^{α} 是 n 值的．

（3）当 α 是无理数或虚数时，z^{α} 是无穷多值的．

由于幂函数是指数函数与对数函数 $\mathrm{Ln}z$ 的复合函数，因此当 α 不是整数时，我们可在带域 G 内把 $\mathrm{Ln}z$ 分成无穷多个解析分支，相应地 z^{α} 也可分成无穷多个解析分支．设 $w_k(z)$ 是 $\mathrm{Ln}z$ 在 G 内的单值解析分支，$w_k^*(z)$ 是 z^{α} 的单值解析分支，按定义 $w_k^*(z)=e^{\alpha w_k(z)}$，其中 $w_0^*(z)=e^{\alpha w_0(z)}=e^{\alpha\ln z}$ 称为 z^{α} 的主值支，$w_{k+1}^*(z)$ 与 $w_k^*(z)$ 相差因子 $e^{2\alpha\pi i}$.

由于 $w_k'(z)=\frac{1}{z}$，据复合函数求导法则知

$$(w_k^*(z))' = e^{\alpha w_k(z)}\alpha w_k'(z) = \alpha z^{\alpha-1}.$$

当 α 不是整数时，原点及无穷远点是 z^{α} 的支点．

下面讨论幂函数的映射性质，我们只讨论 $\alpha>0$ 的情形．

设 D 是角域 $0<\arg z<\theta_0$，并限制 θ_0 及 $\alpha\theta_0$ 在 0 与 2π 之间，由于 $w_{k+1}^*(z)$ 和 $w_k^*(z)$ 相差因子 $e^{2\alpha\pi i}$，而 α 是正实数，所以它们相差是一个旋转，$w_k^*(z)$ 和 $w_0^*(z)$ 相差也是一个旋转 $e^{2k\pi i\alpha}$，这样我们只要考虑主值支 $w_0^*(z)$ 就行了．

$$w = w_0^*(z) = e^{\alpha\ln z} = e^{\psi},\ \psi = \alpha\ln z.$$

我们已知 $\psi=\alpha\ln z$ 把角域 $0<\arg z<\theta_0$ 共形映射为带域 $0<\mathrm{Im}\psi<\alpha\theta_0$，$w=e^{\psi}$ 又把这个带域共形映射为角域 $0<\arg w<\alpha\theta_0$，因此 $w_0^*(z)$ 把开度为 θ_0 的角域共形映射为开度等于 $\alpha\theta_0$ 的角域（图 4.3）

特别地，当 $\alpha=n$（n 是不小于 2 的自然数），我们可取 $\theta_0=\frac{2\pi}{n}$，则 $w=z^n$ 把角域 $0<\arg z<\frac{2\pi}{n}$ 共形映射为角域 $0<\arg w<2\pi$. 当 α

$=\frac{1}{n}$，$w=z^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{z}$又称为根式函数，它有 n 个不同的单值解析分支，若取 $\theta_0=2\pi$，则 $w=w_k^*(z)=\sqrt[n]{|z|}\,\mathrm{e}^{\frac{\arg z+2k\pi}{n}\mathrm{i}}$，　$k=0,1,2,\cdots.n-1$

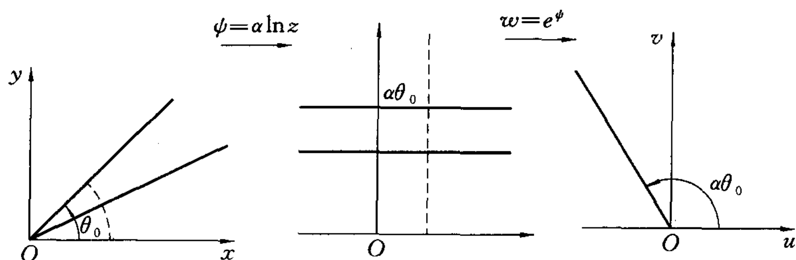


图 4.3

把去掉正实轴的 z 平面 $0<\arg z<2\pi$ 映射为 n 个角域 $\frac{2k}{n}\pi<\arg w<\frac{2k+2}{n}\pi$ $(k=0,1,\cdots,n-1)$(图 4.4)

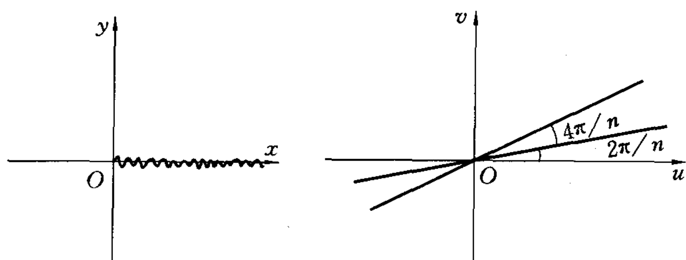


图 4.4

4.4　三角函数和双曲函数

当 x 是实数时，由 Euler 公式知

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}=\cos x+\mathrm{i}\sin x,\quad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}=\cos x-\mathrm{i}\sin x.$$

由此可得　$\cos x=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}$，　$\sin x=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}$

定义 4.5　当 z 是复数时，我们定义

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

由此可见，对任一复数 z，Euler 公式仍成立

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z.$$

三角函数有下列性质：

(1) 由于 e^{iz} 及 e^{-iz} 都以 2π 为周期，所以 $\sin z$ 与 $\cos z$ 都是以 2π 为周期的周期函数．

(2) $\sin z$ 是奇函数，$\cos z$ 是偶函数．

(3) "和角"公式成立，三角学中其它有关正弦与余弦函数的公式都有效，例如

$$\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2.$$

$$\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2.$$

$$\sin^2 z+\cos^2 z=1.$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-z\right)=\cos z.$$

(4) 由于指数函数在整个有穷平面上是解析的，再由复合函数求导法则可知．$\sin z$ 及 $\cos z$ 在有穷平面上解析，且

$$(\sin z)' = \cos z, \ (\cos z)' = -\sin z.$$

(5) $\sin z$ 的零点为 $z=n\pi$． $(n=0, \pm 1\cdots)$

$\cos z$ 的零点为 $z=(n+\frac{1}{2})\pi$． $(n=0, \pm 1, \cdots)$

(6) 在复数域内不能再断言 $|\sin z|\leqslant 1$ $|\cos z|\leqslant 1$，

例如取 $z=iy$ $(y>0)$则

$$\cos(iy) = \frac{e^{i(iy)} + e^{-i(iy)}}{2} = \frac{e^{-y} + e^{y}}{2} > \frac{e^{y}}{2}.$$

只要 y 充分大，$\cos iy$ 就可大于任一预先给定的正数，一般地我们可证得$|\sin z|$与$|\cos z|$都是无界的，其它复变数三角函数的定义如下：

$$\mathrm{tg} z=\frac{\sin z}{\cos z}, \quad \mathrm{ctg} z=\frac{\cos z}{\sin z},$$

$$\sec z=\frac{1}{\cos z},\quad \csc z=\frac{1}{\sin z}.$$

定义 4.6 我们定义复数 z 的**双曲正弦、双曲余弦、双曲正切、双曲余切，双曲正割，双曲余割函数**分别为：

$$\mathrm{sh}z=\frac{e^z-e^{-z}}{2},\quad \mathrm{ch}z=\frac{e^z+e^{-z}}{2},$$

$$\mathrm{th}z=\frac{\mathrm{sh}z}{\mathrm{ch}z},\quad \mathrm{cth}z=\frac{\mathrm{ch}z}{\mathrm{sh}z},$$

$$\mathrm{sech}z=\frac{1}{\mathrm{ch}z},\quad \mathrm{csch}z=\frac{1}{\mathrm{sh}z}.$$

$\mathrm{ch}z$ 和 $\mathrm{sh}z$ 都是以 $2\pi i$ 为周期的周期函数，$\mathrm{ch}z$ 为偶函数，$\mathrm{sh}z$ 为奇函数，它们在复平面内都是解析函数，且

$$(\mathrm{ch}z)'=\mathrm{sh}z,\quad (\mathrm{sh}z)'=\mathrm{ch}z.$$

据定义还可证得 $\mathrm{ch}iy=\cos y,\quad \mathrm{sh}iy=i\sin y.$

$$\mathrm{ch}^2z-\mathrm{sh}^2z=1.$$

$$\mathrm{ch}(z_1+z_2)=\mathrm{ch}z_1\mathrm{ch}z_2+\mathrm{sh}z_1\mathrm{sh}z_2.$$

$$\mathrm{ch}(z_1+z_2)=\mathrm{sh}z_1\mathrm{ch}z_2+\mathrm{ch}z_1\mathrm{sh}z_2.$$

4.5 反三角函数与反双曲函数

我们先从反正切开始，由正切函数 $z=\mathrm{tg}w$ 所定义的反函数 w 称为 z 的**反正切函数**记作 $w=\mathrm{Arctg}z$.

由于 $z=\frac{1}{i}\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{e^{iw}+e^{-iw}}$ 这可改写成 $e^{2iw}=\frac{1+iz}{1-iz}$.

所以

$$2iw=\mathrm{Ln}\frac{1+iz}{1-iz},$$

$$w=\frac{1}{2i}\mathrm{Ln}\frac{1+iz}{1-iz}=\frac{1}{2i}[\mathrm{Ln}(z-i)-\mathrm{Ln}(z+i)+\pi i].$$

因为 $\mathrm{Ln}(z-i)$ 及 $\mathrm{Ln}(z+i)$ 都是多值解析函数，所以 $\mathrm{Arctg}z$ 也是多值解析函数，不难看出 $z=\pm i$ 是 w 的支点，但 $z=\infty$ 不是它的支点.

下面求余弦函数 $z=\cos w$ 的反函数．

$z=\cos w=\dfrac{e^{iw}+e^{-iw}}{2}$ 可解出 $e^{iw}=z+\sqrt{z^2-1}$.

即 $\operatorname{Arccos} z=w=-i\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2-1})$.

这也是一个多值解析函数，$z=\pm 1$ 与 $z=\infty$ 都是 $\operatorname{Arccos} z$ 的支点．

正弦函数的反函数 $w=\operatorname{Arcsin} z$.

由于 $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-w\right)=\cos w$，所以

$$w=\operatorname{Arcsin} z=\frac{\pi}{2}+i\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2-1}).$$

我们来讨论双曲函数的反函数

由等式 $z=\operatorname{ch} w=\dfrac{e^{w}+e^{-w}}{2}$，可解出 $w=\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2-1})$，

于是 $\operatorname{Arcch} z=\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2-1})$.

同理可得 $\operatorname{Arcsh} z=\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2+1})$.

$$\operatorname{Arcth} z=\frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+z}{1-z}.$$

它们都是多值解析函数．

三角函数及反三角函数的映射性质较复杂，我们不在此讨论了．

例 1 试证：在将 z 平面适当割开后，函数 $f(z)=\sqrt[3]{(1-)z^2}$ 能分出三个单值解析分支，并求出在 $z=2$ 取负值的那个分支在 $z=i$ 的值．

证 (1) 当 z 沿仅包含 $z=0$ 的简单闭曲线 c_1 绕行一圈，z 的辐角增加 2π，$1-z$ 的辐角未变动，$f(z)$ 的辐角增加了 $\dfrac{4\pi}{3}$.

当 z 沿仅包含 $z=1$ 的简单闭曲 c_2 绕行一圈，$1-z$ 的辐角增加 2π，而 z 的辐角未变动，所以 $f(z)$ 的辐角增加了 $\dfrac{2\pi}{3}$.

当 z 沿包含 $z=0$ 及 $z=1$ 的简单闭曲线按负向绕行一圈，

$f(z)$的幅角改变了$\frac{-4\pi}{3}+\left(\frac{-2\pi}{3}\right)=-2\pi$，因此 $z=0$ 及 $z=1$ 为 $f(z)$的支点，而 $z=\infty$不是支点，因此在割去线段 $0\leqslant \mathrm{Re}z\leqslant 1$ 的 z 平面上能分出三个单值解析分支

(2) 设 $z=r_1e^{i\theta_1}$，$1-z=r_2e^{i\theta_2}$，

则 $f_k(z)=\sqrt[3]{r_1^2(z)r_2(z)}e^{\frac{2\theta_1(z)+\theta_2(z)+2k\pi}{3}i}$，$k=0,1,2$，

当 $z=2$ 时，$\theta_1=0$，$\theta_2=\pi$；$r_1=2$；$r_2=1$，

所以 $f_k(2)=\sqrt[3]{2^2}e^{\frac{\pi+2k\pi}{3}i}$，当且仅当 $k=1$ 时，$f_k(2)$取负值．

故所取分支为 $f_1(z)=\sqrt[3]{r_1^2(z)r_2(z)}e^{\frac{2\theta_1(z)+\theta_2(z)+2\pi}{3}i}$，

$$f_1(i)=\sqrt[3]{|i|^2|1-i|}e^{\frac{\pi+\frac{7}{4}\pi+2\pi}{3}i}=-\sqrt[6]{2}e^{\frac{7\pi}{12}i}.$$

例 2 证明在将 z 平面适当割开后，函数 $f(z)=(z-a)^\alpha(z-b)^\beta$ 能分出无穷多个单值解析分支．其中 a,b 是不同的复常数，α，β 为无理数的实常数．

证 设 $z-a=r_1e^{i\theta_1}$，$z-b=r_2e^{i\theta_2}$，则

$$\begin{aligned}f(z)&=(z-a)^\alpha(z-b)^\beta=e^{\alpha\mathrm{Ln}(z-a)+\beta\mathrm{Ln}(z-b)}\\&=e^{\alpha[\ln r_1+i(\theta_1+2k_1\pi)]+\beta[\ln r_2+i(\theta_2+2k_2\pi)]},\ k_1,k_2=0,\pm1\cdots\\&=r_1^\alpha r_2^\beta e^{(\alpha\theta_1+\beta\theta_2)i}e^{(2\alpha k_1\pi+2\beta k_2\pi)i}.\end{aligned}$$

因此对于不同的分支，$f(z)$的值相差因子 $e^{2(\alpha k_1+\beta k_2)\pi i}$.

设 C_1 是其内部包含点 $z=a$ 而不包含点 $z=b$ 的简单闭曲线，当 z 沿 C_1 按逆时针方向绕行一圈时，$z-a$ 的幅角增加了 2π，而 $z-b$的幅角未变动，因此 $f(z)$的幅角增加了 $2\pi\alpha$，因 α 是无理数，故当 z 沿 C_1 绕行一圈时，$f(z)$从一个分支变为另一个分支，因此 $z=a$ 是$f(z)$的支点，同理 $z=b$ 也是$f(z)$的支点．若 C 是其内部同时包含点 $z=a$ 与 $z=b$ 的简单闭曲线，当 z 沿 C 按顺时针方向绕行一圈时，$f(z)$的幅角减少了$(\alpha+\beta)2\pi$，于是 $z=\infty$是 $f(z)$的支点，我们可取分别由 a,b 到∞连接起来的简单曲线作为割线，在具有这种割线的区域内，$f(z)$可分出无穷多个单值解析分支．

第三章　复变函数的积分

复变函数的积分是研究解析函数的重要工具．本章主要内容是建立柯西定理和柯西积分公式，它们是复变函数论的基本定理和基本公式．由这些公式得出解析函数具有任意阶导数及最大模原理等重要性质．

§1　复变函数的积分概念与性质

1.1　积分的概念

为了叙述上的简便，今后我们所提到的曲线（除特别说明外）都是指光滑的或逐段光滑的简单曲线，对逐段光滑的闭简单曲线亦可称为**围线**，闭简单曲线亦称为**约当曲线**．

定义 1.1　设函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，在带域 D 内有定义，D 内曲线 c：$z=z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t)$ $(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$ 以 $a=z(\alpha)$ 为起点，$b=z(\beta)$ 为终点，将曲线 c 任意分割，分点依次为 $a=z_0,z_1,z_2\cdots z_n=b$，在每一小弧段上任取点 $z_k'\in\widehat{z_{k-1}z_k}(k=1,2,\cdots n)$，记 $\|\Delta z\|=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|z_k-z_{k-1}|$，当分点无限增多，且 $\|\Delta z\|\to 0$，若和式 $\sum\limits_{k=1}^{n}f(z_k')(z_k-z_{k-1})$ 存在极限，则称此极限为函数 $f(z)$ 沿着有向曲线 c（从 a 到 b）的**积分**，并记为

$$\int_c f(z)\mathrm{d}z=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \|\Delta z\|\to 0}}\sum_{k=1}^{n}f(z_k')(z_k-z_{k-1}).\qquad(1.1)$$

此时称 $f(z)$ 沿 c 可积，c 称为积分路径（图 1.1）．当 c 是一条闭曲

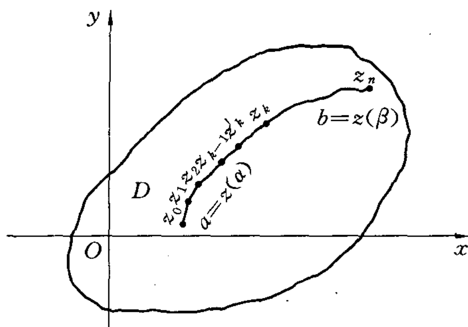


图 1.1

线时，$\int_c f(z)\mathrm{d}z$ 表示沿 c 的正向积分，而 $\int_{c^-} f(z)\mathrm{d}z$ 表示沿 c 的负向积分．其中闭曲线 c 的方向规定如下：当观察者沿 c 绕行时，若 c 的内部在观察者的左边，就规定这绕行方向为正向，反之，就规定为负向．

1.2 复积分与实积分的关系

设曲线 c：$z=z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t)$，$(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$

分点记为 $z_k=x_k+\mathrm{i}y_k$，记 $z_k'=\xi_k+\mathrm{i}\eta_k$，$\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$，$\Delta y_k=y_k-y_{k-1}(k=1,2,\cdots,n)$ 函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，和式 $\sum_{k=1}^{n}f(z_k')\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n}\{[u(\xi_k,\eta_k)+\mathrm{i}v(\xi_k,\eta_k)][\Delta x_k+\mathrm{i}\Delta y_k]\}$，即 $\sum_{k=1}^{n}f(z_k')\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n}[u(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k] + \mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}[v(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k + u(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k]$.

在数学分析的曲线积分中知道，当 $u(x,y)$，$v(x,y)$在 c 上连续时，上式右边的极限存在，且为 $\int_c u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y + \mathrm{i}\int_c v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y$ 因此得到

定理 1.1 设 $f(z)$在带域 D 内有定义，若 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 在 D 内的曲线 c 上连续，则 $f(z)$沿曲线 c 可积，且有

$$\int_c f(z)\mathrm{d}z = \int_c u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y + \mathrm{i}\int_c v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y. \qquad (1.2)$$

设 c：$z=z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t)$ $(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$，起点对应于 α，终点对应于 β，则有

$$\int_c f(z)\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)\mathrm{d}t. \qquad (1.3)$$

事实上，(1.2)右边的积分可写成 Riemann 积分的形式，

$$\int_c u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y = \int_\alpha^\beta [u(x(t),y(t))x'(t) - v(x(t),y(t))y'(t)]\mathrm{d}t$$

$$\int_c v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y = \int_\alpha^\beta [v(x(t),y(t))x'(t) + u(x(t),y(t))y'(t)]\mathrm{d}t$$

所以

$$\begin{aligned}\int_c f(z)\mathrm{d}z &= \int_\alpha^\beta [u(x(t),y(t)) + \mathrm{i}v(x(t),y(t))][x'(t) + \mathrm{i}y'(t)]\mathrm{d}t \\ &= \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

因此我们可把 $f(z)$沿曲线 c 的积分化为 $f(z)$关于曲线 c 的参数 t 的定积分.

1.3 积分的性质和计算

由于复函数积分的概念类似于实函数积分的概念，同时一个复积分又定义了两个实函数曲线积分，因此它将保留实函数积分的有关性质.

设 $f(z)$，$g(z)$在曲线 c 上都是可积的，则

(1) $\int_c af(z)\mathrm{d}z = a\int_c f(z)\mathrm{d}z$. （$a$ 为复常数）

(2) $\int_c [f(z) \pm g(z)]\mathrm{d}z = \int_c f(z)\mathrm{d}z \pm \int_c g(z)\mathrm{d}z$.

(3) $\int_{c^-} f(z)\mathrm{d}z = -\int_c f(z)\mathrm{d}z$.

(4) $\int_c f(z)\mathrm{d}z = \int_{c_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{c_2} f(z)\mathrm{d}z$，其中曲线 c 由 c_1 与 c_2

拼接而成.

(5) 设 c 的长为 l，$M=\max\limits_{z\in c}|f(z)|$ 则有

$$\left|\int_c f(z)\mathrm{d}z\right|\leqslant\int_c|f(z)|\ |\mathrm{d}z|\leqslant M\int_c \mathrm{d}s=Ml.$$

事实上，对下面不等式各边取极限就得出上面不等式

$$\left|\sum_{k=1}^{n}f(z_k')\Delta z_k\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|f(z_k')|\cdot|\Delta z_k|\leqslant M\sum_{k=1}^{n}\Delta s_k.$$

性质(5)是一个重要的不等式，在复函数理论中它将是一个有力的工具.

例1 计算积分 $\int_c z^2\mathrm{d}z$，其中曲线 c 是从原点到 $z=1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ 的直线段.

解 由定理1.1，可知积分 $\int_c z^2\mathrm{d}z$ 是存在的.

$$f(z)=u+\mathrm{i}v=z^2=x^2-y^2+\mathrm{i}2xy,$$

于是

$$u(x,y)=x^2-y^2,\ v(x,y)=2xy.$$

由(1.2)得

$$\int_c z^2\mathrm{d}z=\int_c(x^2-y^2)\mathrm{d}x-2xy\mathrm{d}y+\mathrm{i}\int_c 2xy\mathrm{d}x+(x^2-y^2)\mathrm{d}y.$$

曲线 c 的方程：$y=\sqrt{3}x\ (0\leqslant x\leqslant 1)$.

$$\begin{aligned}\int_c(x^2-y^2)\mathrm{d}x-2xy\mathrm{d}y&=\int_0^1(x^2-3x^2)\mathrm{d}x-\int_0^1 2x\sqrt{3}x\sqrt{3}\mathrm{d}x\\&=\int_0^1-8x^2\mathrm{d}x=-\frac{8}{3},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_c 2xy\mathrm{d}x+(x^2-y^2)\mathrm{d}y&=\int_0^1[2x\cdot\sqrt{3}x+(x^2-3x^2)\sqrt{3}]\mathrm{d}x\\&=0,\end{aligned}$$

因此

$$\int_c z^2\mathrm{d}x=-\frac{8}{3}.$$

如果我们通过 c 的参数方程 $z=z(t)$，利用公式(1.3)直接计算积分 $\int_c f(z)\mathrm{d}z$ 比较容易，例如在上例中，

曲线 c：$z=z(t)=(1+\sqrt{3}\mathrm{i})t$，　$(0\leqslant t\leqslant 1)$

$$z^2=(1+\sqrt{3}\mathrm{i})^2t^2,\quad \mathrm{d}z=(1+\sqrt{3}\mathrm{i})\mathrm{d}t,$$

由(1.3)得

$$\int_c z^2\mathrm{d}z=\int_0^1(1+\sqrt{3}\mathrm{i})^3t^2\mathrm{d}t=\frac{(1+\sqrt{3}\mathrm{i})^2}{3}=-\frac{8}{3}.$$

例2　计算积分 $\int_c \frac{1}{\sqrt{z}}\mathrm{d}z$，其中 C 是上半单位圆周，起点为 $z=1$，取分支 $\sqrt{1}=-1$.

解　由于取分支 $\sqrt{1}=-1$，所以 $\sqrt{z}=\sqrt{|z|}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+2\pi}{2}}=-\sqrt{|z|}\mathrm{e}^{\frac{\theta}{2}\mathrm{i}}$，设曲线 c；$z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$，于是

$$\int_c\frac{1}{\sqrt{z}}\mathrm{d}z=\int_0^\pi\frac{1}{-\mathrm{e}^{\frac{\theta}{2}\mathrm{i}}}\cdot\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta=-\mathrm{i}\int_0^\pi\mathrm{e}^{\frac{\theta}{2}\mathrm{i}}\mathrm{d}\theta$$

$$=-2\mathrm{e}^{\frac{\theta}{2}\mathrm{i}}\Big|_0^\pi=2-2\mathrm{i}.$$

例3　证明积分

$$\int_c(z-a)^n\mathrm{d}z=\begin{cases}2\pi\mathrm{i}, & n=-1\\ 0. & n\neq-1\end{cases}$$

其中 n 为整数，c 为圆周 $|z-a|=r$ $(r>0)$ 的正向，即沿逆时针方向.

解　c：$z-a=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$　　$(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$

$$\int_c(z-a)^n\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\cdot\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta=\mathrm{i}r^{n+1}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=\mathrm{i}r^{n+1}\int_0^{2\pi}[\cos(n+1)\theta+\mathrm{i}\sin(n+1)\theta]\mathrm{d}\theta$$

$$=\begin{cases}2\pi\mathrm{i}, & \text{当 } n=-1\\ 0, & \text{当 } n\neq-1\end{cases}$$

这个积分较重要，后面将多次用到它.

§2 柯西积分定理

根据连续函数 $f(z)$的积分定义，一般说这种积分的数值不仅依赖于被积函数，而且依赖于所取的曲线 c. 人们要问，$f(z)$应满足怎样的条件，才能使 $f(z)$在单连通区域 D 内，积分值与积分路径无关，1825年柯西给出如下的定理，回答了上述问题.

2.1 柯西基本定理

定理2.1 设函数 $f(z)$在单连通区域 D 内解析，则对于 D 内任一条简单闭曲线 c，有

$$\int_c f(z)\mathrm{d}z = 0. \tag{2.1}$$

在当时证明这条定理时，附加了条件"设函数的导数 $f'(z)$在 D 内是连续的"，在这一假定下，证明就方便多了，事实上，设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，由于 $f(z)$在 D 内解析及 $f'(z)$在 D 内连续，则 $u(x,y)$, $v(x,y)$在 D 内处处存在一阶连续偏导数，且满足C-R 条件：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

由格林公式

$$\int_c p\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_G\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \text{（}G\text{ 为 }c\text{ 所围区域）}$$

因此积分

$$\begin{aligned}\int_c f(z)\mathrm{d}z &= \int_c u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y + \mathrm{i}\int_c v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y \\ &= \iint_G\left(-\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \mathrm{i}\iint_G\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.\end{aligned}$$

上述附加条件较强，在1900年古萨(Goursat)去除了 $f'(z)$在 D 内连续的假定，只要求 $f(z)$在单连通域 D 内解析，但证明方法比较

麻烦，首先简单介绍一下这个证明的思路：因为任意一条逐段光滑曲线可被折线逼近，因此如能证明对于任意一条闭折线定理成立的话，那就能证明对于任意曲线定理亦成立，而在任意一条闭折线上的积分又可分成若干个在三角形上的积分和，为此问题又化简为只要证明定理对于任意一个三角形边上的积分为零即可.

下面仅对 c 为一个三角形周界的情况给出定理的证明：

设 c 为 D 内任一个三角形 Δ(图2.1)，

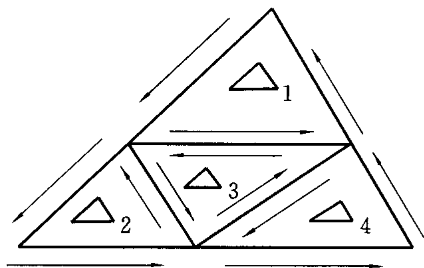


图 2.1

设 $\left|\int_{\Delta} f(z)\mathrm{d}z\right| = M.$

我们来证明 $M=0$. 二等分三角形 Δ 的每一边，两两连接这些分点，给定的三角形被分成了四个全等的三角形，它们的周界分别是 $\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3,\Delta_4$，则

$$\int_{\Delta} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\Delta_1} + \int_{\Delta_2} + \int_{\Delta_3} + \int_{\Delta_4}. \tag{2.2}$$

因为在这里沿每一条连接分点的线段上，积分恰好按相反的方向取了两次，因而互相抵消. 由(2.2)沿周界 $\Delta_k(k=1,2,3,4)$中至少有一个所取的积分的模不小于$\dfrac{M}{4}$，比如说，假定这个周界是 Δ_1：$\left|\int_{\Delta_1} f(z)\mathrm{d}z\right| \geqslant \dfrac{M}{4}$，对于这个三角形周界 Δ_1，和前面一样，把它分成四个全等三角形，其中一个的周界 $\Delta^{(2)}$满足 $\left|\int_{\Delta^{(2)}} f(z)\mathrm{d}z\right| \geqslant$

$\frac{M}{4^2}$，无限制地继续这种作法，得三角形序列，其周界分别为

$$\Delta=\Delta^{(0)},\quad \Delta_1=\Delta^{(1)},\ \Delta^{(2)}\cdots\Delta^{(n)}\cdots,$$

其中每一个包含后面一个，且有下列不等式：

$$\left|\int_{\Delta^{(n)}} f(z)\mathrm{d}z\right| \geqslant \frac{M}{4^n}.\quad (n=0,1,2,\cdots) \tag{2.3}$$

用 U 表示周界 Δ 的长度，于是周界 $\Delta^{(n)}$ 的长度是 $\frac{U}{2^n}(n=1,2,\cdots)$，现在来估计 $\int_{\Delta^{(n)}} f(z)\mathrm{d}z$ 的模，由于三角形序列中每一个包含它后面的全部三角形，且 $\frac{U}{2^n}\to 0(n\to\infty)$，如同数学分析中闭矩形套定理可得存在 z_0 属于序列中所有三角形，又因 $f(z)$ 在 z_0 有导数 $f'(z_0)$，所以，任给 $\varepsilon>0$，可找到 $\delta>0$，使得当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时，有

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-f'(z_0)\right|<\varepsilon.$$

即

$$|f(z)-f(z_0)-(z-z_0)f'(z_0)|<\varepsilon|z-z_0|. \tag{2.4}$$

显然，当 n 充分大时，$\Delta^{(n)}$ 包含在以 z_0 为中心以 δ 为半径的上述圆内，因此当 $z\in\Delta^{(n)}$ 时，(2.4)成立，且这时 $|z-z_0|<\frac{U}{2^n}$，从而 $|f(z)-f(z_0)-(z-z_0)f'(z_0)|<\frac{U}{2^n}\varepsilon$.

其次，由于

$$\int_{\Delta^{(n)}}\mathrm{d}z=0,\qquad \int_{\Delta^{(n)}} z\mathrm{d}z \doteq 0.$$

我们有

$$\int_{\Delta^{(n)}} f(z)\mathrm{d}z=\int_{\Delta^{(n)}}[f(z)-f(z_0)-(z-z_0)f'(z_0)]\mathrm{d}z.$$

于是当 n 充分大时，

$$\left|\int_{\Delta^{(n)}} f(z)\mathrm{d}z\right|=\left|\int_{\Delta^{(n)}}[f(z)-f(z_0)-(z-z_0)f'(z_0)]\mathrm{d}z\right|$$

$$<\frac{U}{2^n}\cdot\frac{U}{2^n}\varepsilon=\varepsilon\cdot\frac{U^2}{4^n}. \tag{2.5}$$

比较(2.3)及(2.5)有

$$\frac{M}{4^n}<\varepsilon\cdot\frac{U^2}{4^n}.$$

即 $M<\varepsilon U^2$，由于 ε 可取任意小正数，所以 $M=0$.

2.2 柯西定理的推广

定理2.2 设 c 是一条简单闭曲线，D 为 c 之内部，若 $f(z)$ 在 D 内解析，在 $\overline{D}=D+c$ 上连续，则 $\int_c f(z)\mathrm{d}z=0$

在定理2.1中要求 $f(z)$ 在 c 上及 c 的内部均解析，现在只要求 $f(z)$ 在 c 上及 c 的内部连续，在 c 的内部解析，显然这里的条件减弱了，我们亦只给出证明思路：在 D 内取一串闭曲线 c_n，当 $n\to\infty$ 时，$c_n\to c$. 由于 c_n 属于 D. 因此由柯西基本定理得 $\int_{c_n} f(z)\mathrm{d}z=0$ 然后再过渡到极限，利用 $f(z)$ 在闭域 $\overline{D}$ 上的连续性，以及 $c_n\to c$，就可证得

$$\int_c f(z)\mathrm{d}z=\lim_{c_n\to c}\int_{c_n} f(z)\mathrm{d}z=0.$$

柯西定理的另一推广是 D 为多连通区域情况

定义2.1 设曲线 Γ 是由 $n+1$ 条闭曲线 $c, c_1, c_2, \cdots, c_n$ 组成，其中 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 互不包含又互不相交且都含于闭曲线 c 的内部，称曲线 $\Gamma=c+c_1^-+c_2^-+\cdots+c_n^-$ 是由 $c, c_1, c_2, \cdots, c_n$ 组成的一条**复合闭路**，其正向为：c 取逆时针方向，$c_k(k=1,2,\cdots,n)$ 取顺时针方向，由 Γ 围成的区域为

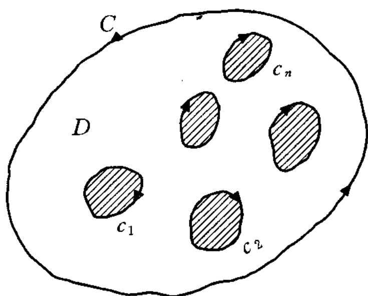


图 2.2

多连通区域(图2.2).

定理2.3 设 D 是由复围线 $\Gamma=c+c_1^-+c_2^-+\cdots+c_n^-$ 所围成的多连通区域,设 $f(z)$ 在 D 内解析,并在 $\overline{D}=D+\Gamma$ 上连续,则

(1) $\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z=0$,

(2) $\int_c f(z)\mathrm{d}z=\int_{c_1}f(z)\mathrm{d}z+\int_{c_2}f(z)\mathrm{d}z+\cdots+\int_{c_n}f(z)\mathrm{d}z.$

证 取 n 条互不相交且全在 D 内的(端点除外)辅助曲线 $L_1,L_2,\cdots,L_n$ 作为割线,用它们将 C 顺次把 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 连接,设想将 D 沿割线割破,割破后的区域 D 就是单连通的(图2.3是 $n=2$ 的情形),对割破后的区域 D 及其边界 c' 应用定理2.2就有

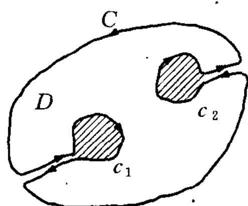


图 2.3

$$\int_{c'}f(z)\mathrm{d}z=0.$$

由于沿着辅助曲线 $L_1,\cdots,L_n$ 的积分,正好从不同的方向各取了一次,在相加的过程中互相抵消,于是得到

$$\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z=0.$$

由于 $\Gamma=c+c_1^-+c_2^-+\cdots+c_n^-$

所以由上式可推得

$$\int_c f(z)\mathrm{d}z=\int_{c_1}f(z)\mathrm{d}z+\int_{c_2}f(z)\mathrm{d}z+\cdots+\int_{c_n}f(z)\mathrm{d}z.$$

2.3 原函数与不定积分

定义2.2 若 $F(z)$ 的导数等于 $f(z)$,则称 $F(z)$ 为 $f(z)$ 的**一个原函数**.

如同实变函数情形一样,可得函数 $f(z)$ 的原函数全体是 $F(z)+c$,其中 c 为任意复常数,称它为 $f(z)$ 的**不定积分**.

由柯西定理知道，在单连通域 D 内解析函数 $f(z)$ 沿着 D 内任何闭曲线的积分为零，因此对于任两点 z_0，$z\in D$，积分 $\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ 只与 z_0，z 有关，而与连接 z_0，z 的路径无关，当 z_0 固定时，积分 $\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ 将是 z 的函数．

定理2.4 设函数 $f(z)$ 在单连通域 D 内解析，点 z_0，$z\in D$，则函数

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta.$$

在 D 内解析，且 $F'(z)=f(z)$.

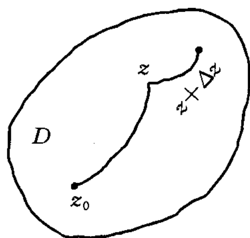


图 2.4

证 我们从导数的定义来证明本定理，任取点 $z\in D$，在 z 点附近任取点 $z+\Delta z\in D$，由于积分 $\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ 与积分路径无关，取图2.4中路径，于是

$$\begin{aligned}F(z+\Delta z)-F(z)&=\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta-\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta\\&=\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta.\end{aligned}$$

因为 $f(z)$ 在 D 内解析，显然在 D 内连续，因此对于任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $|\zeta-z|<\delta$ 时，恒有 $|f(\zeta)-f(z)|<\varepsilon$ 成立，不妨设 $|\Delta z|<\delta$，

$$\begin{aligned}&\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right|\\&=\frac{1}{|\Delta z|}\left|\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta-\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)\mathrm{d}\zeta\right|\\&\leqslant\frac{1}{|\Delta z|}\int_{z}^{z+\Delta z}|f(\zeta)-f(z)|\ |\mathrm{d}\zeta|<\frac{1}{|\Delta z|}\cdot\varepsilon\cdot|\Delta z|=\varepsilon.\end{aligned}$$

故

$$F'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=f(z).$$

定理2.5 若函数 $f(z)$在单连通区域 D 内解析，$\varphi(z)$为 $f(z)$ 的一个原函数，则

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta=\varphi(z)-\varphi(z_0).\quad (z_0, z\in D)$$

证 令 $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$，由定理2.4知 $F'(z)=f(z)$

由于 $\varphi'(z)=f(z)$ 因此 $\varphi(z)=F(z)+c$ （c 为常数）

$$\varphi(z_0)=F(z_0)+c=0+c=c.$$

故

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta=F(z)=\varphi(z)-c=\varphi(z)-\varphi(z_0).$$

这定理表明：解析函数积分的计算有类似于牛顿-莱布尼兹公式.

例1 计算 $\int_c \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z$，其中 c 是上半圆周 $\begin{cases}x^2+2x+y^2=0\\ y\geqslant 0\end{cases}$，起点为 $z=0$.（图2.5）

解 函数 $f(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$在 z 平面上解析，于是

$$\int_c \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z=\int_0^{-2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\Big|_0^{-2}=\frac{1}{\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}}-1)$$

$$=-\sin 2+\mathrm{i}(1-\cos 2).$$

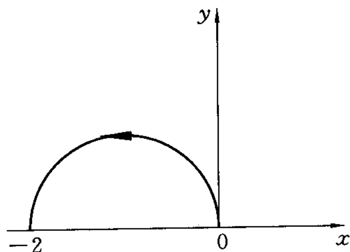


图 2.5

例2 计算积分 $\int_c \frac{\mathrm{d}z}{z}$，其中 c 分别为下列曲线

(1) 右半圆周 $|z|=1$，$\mathrm{Re}z\geqslant 0$，起点 $z=-\mathrm{i}$.

(2) 左半椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$，$\mathrm{Re}z\leqslant 0$，起点为 $-\mathrm{i}$.

解 如图2.6所示右半圆周为 c_1，左半椭圆为 c_2.

(1) $\frac{1}{z}$ 除原点外处处解析，在区域 $-\pi<\arg z<\pi$ 内，有原函数 $\ln z$，所以

$$\int_{c_1}\frac{dz}{z}=\int_{-i}^{i}\frac{dz}{z}=\ln z\Big|_{z=-i}^{i}=\ln i-\ln(-i)$$

$$=\frac{\pi}{2}i-\left(-\frac{\pi}{2}i\right)=\pi i.$$

(2) $\int_{c_2}\frac{dz}{z}=\int_{c_1}\frac{dz}{z}-\int_{c_1+c_2^-}\frac{dz}{z}=\pi i-2\pi i=-\pi i.$

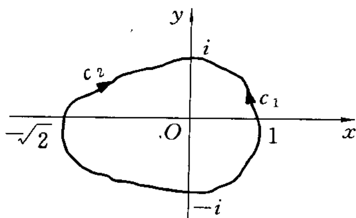


图 2.6

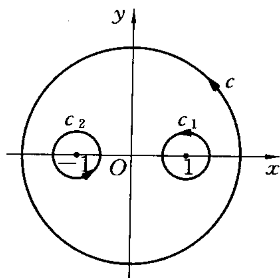


图 2.7

例 3 计算 $\int_c \frac{5z+1}{z^2-1}dz$，其中 c：$|z|=2$ 取逆时针方向

解 $$\frac{5z+1}{z^2-1}=\frac{3}{z-1}+\frac{2}{z+1}.$$

作复合闭路 $\Gamma=c+c_1^-+c_2^-$，(如图 2.7 所示)，则

$$\int_c\frac{5z+1}{z^2-1}dz=\int_{c_1}\frac{5z+1}{z^2-1}dz+\int_{c_2}\frac{5z+1}{z^2-1}dz,$$

而

$$\int_{c_1}\frac{5z+1}{z^2-1}dz=\int_{c_1}\frac{3}{z-1}dz+\int_{c_1}\frac{2}{z+1}dz$$

$$=3\cdot 2\pi i+0=6\pi i,$$

$$\int_{c_2}\frac{5z+1}{z^2-1}dz=\int_{c_2}\frac{3}{z-1}dz+\int_{c_2}\frac{2}{z+1}dz=4\pi i,$$

因此

$$\int_c \frac{5z+1}{z^2-1}dz = 6\pi i + 4\pi i = 10\pi i.$$

§3 柯西积分公式及其推论

柯西定理最重要的结果是柯西积分公式，这一公式表示，一个在区域 D 内解析，在 $\overline{D}$ 上连续的函数 $f(z)$，它在边界上的值决定了它在 D 内任意一点的值.

3.1 柯西积分公式

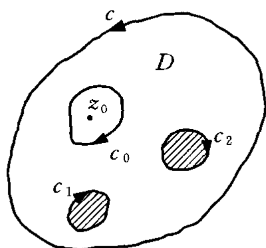


图 3.1

定理3.1 设函数 $f(z)$在区域 D 内解析，在 $\overline{D}=D+C$ 上连续（曲线 c 亦可是复合闭路），则对于 D 内任一点 z，有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta. \tag{3.1}$$

证 设 z_0是区域 D 内的任一点，函数$\frac{f(z)}{z-z_0}$在 D 内除去 $z=z_0$外解析，作以 z_0为中心，以 ρ 为半径的小圆周 c_ρ: $|z-z_0|=\rho$(图3.1)，它与曲线 c 不相交，在以 c 及 c_ρ 所围的区域上，利用柯西定理可得

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z-z_0}dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{c_\rho^-} \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 0.$$

其中 c_ρ^- 表示 c_ρ 的顺时针方向，由上式得到

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_\rho} \frac{f(z)}{z-z_0}dz.$$

这表示上面等式右端的积分与 ρ 无关，为了要证明定理，只要证明

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{c_\rho} \frac{f(z)}{z-z_0}dz = f(z_0). \tag{3.2}$$

事实上，由于 $f(z)$在 $z=z_0$处解析，因此它在 $z=z_0$处连续，即任给

$\varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，使得当$|z-z_0|<\delta$时，就有$|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$，因此当$\rho<\delta$时，在圆周$C_\rho$上的点$z$都满足$|z-z_0|=\rho<\delta$，从而$|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$，于是

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{c_\rho}\frac{f(z)}{z-z_0}dz-f(z_0)\right|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{c_\rho}\frac{f(z)}{z-z_0}dz-\frac{1}{2\pi i}\int_{c_\rho}\frac{f(z_0)}{z-z_0}dz\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{c_\rho}\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}|dz|$$

$$<\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\varepsilon}{\rho}\cdot 2\pi\rho=\varepsilon.$$

这就证明了(3.2)，因为z_0是D内任意一点，所以(3.1)成立.

推论3.1 设函数$f(z)$在区域$|z-z_0|<R$内解析，在闭区域$|z-z_0|\leqslant R$上连续，则有

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{i\theta})d\theta.\quad(0<r\leqslant R)$$

这个公式称为解析函数的**平均值公式**.

证 应用柯西积分公式得

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r}\frac{f(z)}{z-z_0}dz\quad(0<r\leqslant R),$$

令$z=z_0+re^{i\theta}$，代入上式，得到

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0+re^{i\theta})}{re^{i\theta}}rie^{i\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{i\theta})d\theta.$$

例1 计算$\displaystyle\int_c\frac{dz}{z^2+2z}$，其中$c$：$|z|=3$的正向

解 $f(z)=\dfrac{1}{z^2+2z}$，在c内有两个奇点$z=0$和$z=-2$，取较小$\rho>0$，作圆c_1：$|z|=\rho$和c_2：$|z+2|=\rho$，如图3.2所示.

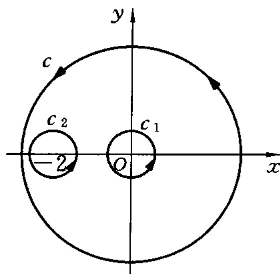


图 3.2

则

$$\int_c \frac{dz}{z^2+2z} = \int_{c_1} \frac{dz}{z^2+2z} + \int_{c_2} \frac{dz}{z^2+2z}$$

$$= \int_{c_1} \frac{\frac{1}{z+2}}{z} dz + \int_{c_2} \frac{\frac{1}{z}}{z+2} dz$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{1}{z+2}\bigg|_{z=0} + 2\pi i \frac{1}{z}\bigg|_{z=-2} = 0.$$

3.2 解析函数的高阶导数

利用柯西积分公式可以证明解析函数的一个重要性质，即解析函数的**无穷可微性**.

定理3.2 设区域 D 的边界为复合闭路，设函数 $f(z)$在 D 内解析，在 $\overline{D}=D+C$ 上连续，则 $f(z)$在 D 内有各阶导数，且对任一点 $z_0 \in D$，有

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz. \tag{3.3}$$

证 我们用数学归纳法证明. 这里仅对 $n=1$时的情况进行论证，其它情况类似可得，设 z_0是 D 中任一点，任取 Δz，使 $z_0+\Delta z \in D$，按柯西积分公式有

$$f(z_0+\Delta z) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z-(z_0+\Delta z)} dz,$$

由此可得

$$\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left[\int_c \frac{f(z)}{z-(z_0+\Delta z)} dz - \int_c \frac{f(z)}{z-z_0} dz\right] \Big/ \Delta z$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)} dz. \tag{3.4}$$

从形式上看，上式右边当 $\Delta z \to 0$时将趋于 $\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz$，下面我们按复变函数积分估计其模的方法来得出上述结果.

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)}dz - \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz\right|$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left|\int_c \frac{\Delta z f(z)}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)^2}dz\right|$$

$$\leqslant\frac{|\Delta z|}{2\pi}\int_c \frac{|f(z)|}{|z-z_0-\Delta z|\ |z-z_0|^2}|dz|.$$

令 $d=\min\limits_{z\in c}|z-z_0|$，$L$ 是 c 的长，$M=\max\limits_{z\in c}|f(z)|$ 而 $\frac{1}{|z-z_0|^2}\leqslant\frac{1}{d^2}$，

$\frac{1}{|z-z_0-\Delta z|}\leqslant\frac{1}{|z-z_0|-|\Delta z|}\leqslant\frac{1}{d-|\Delta z|}<\frac{2}{d}$ $\left(取 |\Delta z|<\frac{d}{2}\right)$，

所以

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)}dz - \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz\right|$$

$$\leqslant\frac{|\Delta z|}{2\pi}\cdot\frac{M\cdot 2}{d^3}\cdot L=\frac{ML}{\pi d^3}|\Delta z|\to 0.$$

当 $\Delta z\to 0$时，因此对(3.4)两边取极限得

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz.$$

由这条定理可以说明下面二点：

(1) 对解析函数 $f(z)$ 求导数，可在积分公式 $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$ 中积分号下对参数 z 求导数得出，并逐次求导，可得出 $f(z)$ 的高阶导数公式(3.3).

(2) 解析函数 $f(z)$ 具有无穷次可微性，这一点与实函数有本质的差别.

3.3 莫瑞拉(Morera)定理与刘维尔(Liouville)定理

定理3.3 (Morera 定理):若函数 $f(z)$在单连通区域 D 内连续,并对 D 内的任意围线 c,有 $\int f(z)\mathrm{d}z=0$则,$f(z)$在 D 内解析.

证 设 z_0为 D 内一固定点,则变上限的积分 $\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$, $z \in D$ 确定一单值函数 $F(z)$, 从定理 2.4 的证明过程中,我们可知若 $f(z)$ 在单连通域 D 内连续,且对 D 内任意围线 c 有 $\int_c f(z)\mathrm{d}z = 0$, 则函数 $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ 在 D 内解析,且 $F'(z) = f(z)$, 又据解析函数的导数还是解析的,所以 $f(z)$ 在 D 内解析.

其实,莫瑞拉定理是柯西定理逆定理,下面利用定理3.2得出柯西不等式,这是一个重要不等式.

定理3.4 设函数 $f(z)$在圆 $|z-z_0|<R$ 上解析,且 $|f(z)|\leqslant M$,则

$$|f^{(n)}(z_0)| \leqslant \frac{Mn!}{R^n}. \quad (n = 1,2,\cdots) \tag{3.5}$$

证 由高阶导数公式(3.3)知对任意的 $r<R$,就有

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}}\int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z,$$

因而有

$$|f^{(n)}(z_0)| \leqslant \frac{n!}{2\pi}\frac{M}{r^{n+1}} \cdot 2\pi r = \frac{Mn!}{r^n}. \quad (n = 1,2,\cdots)$$

上述不等式对任意的 $r<R$ 都成立,令 $r\to R$ 得到(3.5).

利用柯西不等式,我们又可证得下面的重要定理.

定理3.5 (Liouville 定理) 若函数 $f(z)$在全复平面上解析,且有界,则 $f(z)$必为一常数.

证 设 z_0是任一复数,考虑圆周 $|z-z_0|=R$,由假定,存在常

数 M,使对一切 z, 有 $|f(z)|\leqslant M$,据柯西不等式(3.5)有 $|f'(z_0)|\leqslant\frac{M}{R}$, 令 $R\to+\infty$,得到 $f'(z_0)=0$, 由于 z_0的任意性,所以对于一切 z, $f'(z)=0$, 故 $f(z)$是一常数.

例2 设函数 $f(z)$在闭域 $\overline{D}=D+C$ 上解析,C 为 D 之边界, $M=\max\limits_{z\in C}|f(z)|$,证明

$$|f(z)|\leqslant M,\quad z\in D$$

证 对于任一 $z\in D$, 有

$$\{f(z)\}^n=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{[f(\zeta)]^n}{\zeta-z}d\zeta,$$

于是有

$$|f(z)|^n=\frac{1}{2\pi}\left|\int_c\frac{[f(\zeta)]^n}{\zeta-z}d\zeta\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_c\frac{|f(\zeta)|^n}{|\zeta-z|}|d\zeta|$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{M^n}{d}\cdot L.$$

其中 $M=\max\limits_{\zeta\in c}|f(\zeta)|$, $d=\min\limits_{\zeta\in c}|\zeta-z|$, L 为 c 之长度.

从而, $|f(z)|\leqslant M\left(\frac{L}{2\pi d}\right)^{\frac{1}{n}}\to M$, 当 $n\to\infty$时,因此, $|f(z)|\leqslant M\quad(z\in D)$

此例表明,解析函数模 $|f(z)|$在 C 的内部的值不超过它在边界 C 上的最大值,这就是**最大模原理**.我们在下一章中将给出最大模原理的一般证明.

例3 计算积分 $I=\int_c\frac{\sin z}{z(1-z)^3}dz$,其中 c 是不经过点0与点1的任何闭曲线,沿正向积分

解 函数 $f(z)=\frac{\sin z}{z(1-z)^3}$有两个奇点 $z=0$与 $z=1$, 对曲线 c 分下面几种情况来考虑

(1) $z=0$, 1在 c 外部,由柯西定理知 $I=0$.

(2) $z=0$在 c 内部,$z=1$在 c 外部,则由柯西积分公式知

$$I = 2\pi i \left.\frac{\sin z}{(1-z)^3}\right|_{z=0} = 0.$$

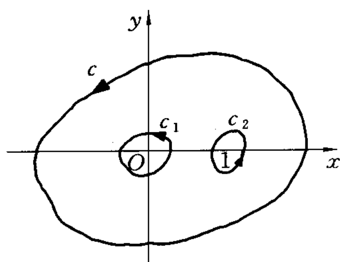


图 3.3

(3) $z=1$在 c 内部，$z=0$在 c 外部，则由高阶导数公式知

$$I = 2\pi i \cdot \frac{1}{2!}\left.\left(-\frac{\sin z}{z}\right)''\right|_{z=1}$$

$$= \pi i(2\cos 1 - \sin 1).$$

(4) $z=0,1$全在 c 的内部，如图3.3所示复合闭路 $\Gamma = c + c_1^- + c_2^-$，则由柯西定理推广知

$$I = \int_{c_1} \frac{\sin z}{z(1-z)^3}dz + \int_{c_2} \frac{\sin z}{z(1-z)^3}dz$$

$$= 2\pi i \left.\frac{\sin z}{(1-z^3)}\right|_{z=0} + \frac{2\pi i}{2!}\left.\left(-\frac{\sin z}{z}\right)''\right|_{z=1}$$

$$= \pi i(2\cos 1 - \sin 1).$$

例 4 若 c 是上半圆周 $|z| = a \neq 1$，$\text{Im}z \geqslant 0$，求积分 $(c)\int_{-a}^{a} \frac{dz}{1+z^2}$ $(a \neq 1)$，此处表示积分沿曲线 c 从$-a$ 到 a.

解 函数 $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$在上半平面内只有一个奇点 $z=i$，作闭曲线 $\Gamma = c^- + L_{[-a,a]}$如图3.4所示.

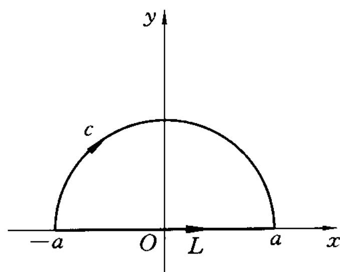


图 3.4

(1) 当$0<a<1$时，$\frac{1}{1+z^2}$在 Γ 内解析，所以

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0.$$

而

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_{c^-} f(z)dz + \int_{L[-a,a]} f(z)dz,$$

因此

$$(c)\int_{-a}^{a} \frac{1}{1+z^2}dz = \int_{L[-a,a]} \frac{dz}{1+z^2} = \int_{-a}^{a} \frac{dx}{1+x^2} = 2\mathrm{arctg}a.$$

(2) 当 $a>1$时，$z=i$，在 Γ 内，由柯西积分公式得

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{1+z^2}dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{z+i}\bigg|_{z=i} = \pi.$$

于是

$$(c)\int_{-a}^{a} \frac{1}{1+z^2}dz = \int_{-a}^{a} \frac{dx}{1+x^2} - \pi = 2\mathrm{arctg}a - \pi.$$

第四章　解析函数的级数

级数是研究解析函数的一个重要工具,通过它可帮助我们更深入地掌握解析函数的性质,以及解决各种实际问题.本章主要介绍如何把一个解析函数在其解析圆域内展开为泰勒级数,以及解析函数在其解析的圆环域内展开为罗朗级数的理论依据和方法.

§1　复函数项级数

设$\{z_n\}n=1,2,\cdots$为一复数列,表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots$$

称为**无穷级数**,其前面n项的和$s_n=z_1+z_2+\cdots+z_n$称为级数的**部分和**,如果部分和数列$\{s_n\}$**收敛**,则称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$**收敛**,且极限$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$称为级数的**和**,若数列$\{s_n\}$不收敛,则称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$**发散**.复数项级数$\sum\limits_{1}^{\infty} z_n(z_n = a_n + \mathrm{i}b_n)$收敛于$\sigma = \alpha + \mathrm{i}\beta$的充要条件是$\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$与$\sum\limits_{1}^{\infty} b_n$分别收敛于$\alpha$与$\beta$. $\sum\limits_{1}^{\infty} z_n$收敛必要条件为$z_n \to 0$.若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$收敛,则称$\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$**绝对收敛**,若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$发散,而$\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$收敛,则称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$**条件收敛**.

若 $f_1(z)$, $f_2(z)\cdots f_n(z)\cdots$都为区域 D 上的复变函数,则称

$$f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \quad (1.1)$$

为区域 D 上的**复函数项级数**.

定义1.1 若 z_0为 D 中一点,当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$ 收敛时,称 z_0 点为级数(1.1) 的**收敛点**,反之当级数$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$ 发散时,则称 z_0 点为级数(1.1) 的**发散点**.

若点集 E 是级数$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 的所有收敛点集,于是在 E 上存在一函数 $s(z)$, 对于 E 上的每一点 z,级数(1.1) 均收敛于 $s(z)$, 即

$$s(z) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k(z)$$

称 $s(z)$为级数(1.1)的**和函数**.

柯西收敛原理:级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 收敛于函数 $S(z)$ 的充要条件为对 E 内任意 z,对任给 $\varepsilon > 0$,存在 $N(z,\varepsilon)$ 使得当 $n > N$ 时,对 $\forall\, m \in N$ 有 $|f_{n+1}(z) + \cdots + f_{n+m}(z)| < \varepsilon$.

我们称级数(1.1)在 E 上**一致收敛**到 $s(z)$, 若对任给 $\varepsilon>0$, 存在一个与 ε 有关,而与 z 无关的正整数 N,使得当 $n\geqslant N$ 时,不等式

$$|s(z) - s_n(z)| < \varepsilon$$

在 E 上成立,其中 $s_n(z) = \sum_{k=1}^{n} f_k(z)$ 为级数(1.1)的 n 项部份和.

定理1.1 (柯西一致收敛原理)

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 E 上一致收敛的充要条件是对于任给 $\varepsilon>0$,存在仅仅依赖于 ε 的正整数 N,使得当 $n\geqslant N$ 时对$\forall\, z\in E$,有

$$|f_{n+1}(z)+f_{n+2}(z)+\cdots+f_{n+p}(z)|<\varepsilon,$$

其中 $p=1,2,\cdots$ (1.2)

证 若 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 E 上一致收敛到 $s(z)$. 则对任给 $\varepsilon>0$,存在仅仅依赖于 ε 的正整数 N,使得当 $n \geqslant N$ 时;对$\forall\ z \in E$ 有 $|s_n(z) - s(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

$$|s_{n+p}(z) - s(z)| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (p \geqslant 1)$$

因此,当 $n \geqslant N$, $p \geqslant 1$时,在 E 上有

$$|s_{n+p}(z) - s_n(z)| < \varepsilon.$$

反之,若(1.2)式成立,由柯西收敛原理知级数$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$在 E 上收敛. 现令 $p \to +\infty$得到当 $n \geqslant N$ 时

$$|s(z) - s_n(z)| \leqslant \varepsilon$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 E 上一致收敛到 $s(z)$.

定理1.2 (Weierstrass M-判别法)

若函数序列 $f_n(z)$在集 E 上定义,并且$|f_n(z)| \leqslant a_n (n=1, 2,\cdots)$,而正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则级数$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 E 上一致收敛.

证 因为对于 E 中任一 z 有

$$\begin{aligned} &|f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \cdots + f_{n+p}(z)| \\ \leqslant\ & a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p} \end{aligned}$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,所以对任给 $\varepsilon>0$,存在正整数 N,使得当 $n \geqslant N$, $p \geqslant 1$时,在 E 上有不等式

$$\begin{aligned} &|f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \cdots + f_{n+p}(z)| \\ \leqslant\ & a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p} < \varepsilon \end{aligned}$$

由柯西一致收敛原理知, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 E 上一致收敛.

定义 1.2 设函数 $f_n(z)(n = 1,2,\cdots)$ 在区域 D 内有定义,若

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 D 内任一有界闭区域上一致收敛，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 D 中**内闭一致收敛**.

用类似于数学分析中的方法，可证得关于在 E 上一致收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 的和函数的连续性以及逐项积分，逐项求导三大定理，现叙述在下面：

定理 1.3 设 $f_n(z)$ $(n = 1,2,\cdots)$ 在集 E 上连续，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 E 上一致收敛到和函数 $s(z)$，则 $s(z)$ 在 E 上连续.

定理 1.4 设 $f_n(z)$ $(n = 1,2,\cdots)$ 在简单曲线 c 上连续，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 c 上一致收敛到函数 $s(z)$，则

$$\int_c S(z)\mathrm{d}z = \sum_{n=1}^{\infty}\int_c f_n(z)\mathrm{d}z.$$

定理 1.5 设函数 $f_n(z)$ $(n = 1,2,\cdots)$ 在区域 D 内解析，并且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 D 中内闭一致收敛到和函数 $s(z)$，则 $s(z)$ 在 D 内解析，并且在 D 内有

$$S^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z),\ k = 1,2,\cdots$$

证 先证 $S(z)$ 在 D 内任一点 z_0 解析，取 z_0 的一个邻域 U，设其边界为 Γ，再在 U 内任作一条围线 C，由定理1.4及柯西定理知

$$\int_C S(z)\mathrm{d}z = \sum_{n=1}^{\infty}\int_C f_n(z)\mathrm{d}z = 0.$$

又据定理1.3，$f_n(z)$ 在 U 内解析必连续，又因 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 U 内一致收敛于 $S(z)$，所以 $S(z)$ 在 U 内连续，由莫瑞拉定理知 $S(z)$ 在 U 内解析．对 $z \in \Gamma$，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(z)}{(z - z_0)^{k+1}}$ 一致收敛于 $\frac{S(z)}{(z-z_0)^{k+1}}$ 再由定理1.4得

$$\frac{k!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{S(z)}{(z-z_0)^{k+1}}dz = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{k!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f_n(z)}{(z-z_0)^{k+1}}dz.$$

即

$$S^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z),\ k = 1,2,\cdots.$$

§2 幂 级 数

现在我们研究一类特别的解析函数项级数，即幂级数.

定义2.1 具有

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = c_0 + c_1(z-z_0) + \cdots + c_n(z-z_0)^n + \cdots \tag{2.1}$$

形式的级数称为**幂级数**，其中 z 是复变量，z_0，$c_n(n=0,1,2,\cdots)$都是复常数. 当 $z_0=0$时，级数(2.1)为

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n + \cdots, \tag{2.2}$$

或在(2.1)式中令 $z-z_0=\zeta$，则它可写成 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\zeta^n$，这与(2.2) 形式相同，为了讨论方便起见，我们常对(2.2) 形式的幂级数进行研究.

定理 2.1 (Abel 定理)

如果幂级数(2.2) 在点 $z_0 \neq 0$ 处收敛，则对于满足不等式 $|z| < |z_0|$ 的每一点 z，级数(2.2) 绝对收敛，并且在任意闭圆 $|z| \leqslant \rho|z_0|$ $(0<\rho<1)$ 上一致收敛.

证 由于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n$ 收敛，由级数收敛的必要条件知 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n z_0^n = 0$，因此存在常数 $M>0$，对一切 n 有 $|c_n z_0^n| < M$，当 $|z| < |z_0|$ 时，

$$|c_n z^n| = \left|c_n z_0^n \frac{z^n}{z_0^n}\right| \leqslant M\left|\frac{z}{z_0}\right|^n.$$

由于$\left|\frac{z}{z_0}\right|<1$，$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{z}{z_0}\right|^n$收敛，由比较判别法知级数$\sum_{n=0}^{\infty}|c_nz^n|$收敛.

又若$|z|\leqslant\rho|z_0|$ $(0<\rho<1)$，则

$|c_nz^n|\leqslant M\rho^n$，　而$\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n$收敛，由 Weierstrass M-判别法知，

$\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$，在$|z|\leqslant\rho|z_0|$时一致收敛.

由上述定理不难推出如下结论：如果级数(2.2)在$z=z_1$点发散，则对于满足不等式$|z|>|z_1|$的一切点z，级数(2.2)必发散.

阿贝尔定理的几何意义是，若z_0是级数(2.2)的收敛点，则级数在以原点为中心，$|z_0|$为半径的圆内处处收敛，若z_1是级数(2.2)的发散点，则级数在以原点为中心，半径为$|z_1|$的圆外处处发散，因此当我们逐渐扩大收敛圆的范围，一般总存在一个非负数R，使得级数(2.2)在圆$|z|<R$内收敛，而在圆$|z|>R$外发散，在圆周$|z|=R$上要另作考虑，这样的R称为级数(2.2)的**收敛半径**，$|z|<R$称为**收敛圆**. 级数(2.2)在收敛圆内绝对收敛，且内闭一致收敛.

对级数(2.2)的收敛情况大致有三种：(1) 在整个复平面上处处收敛，此时$R=+\infty$，(2) 在复平面z上除$z=0$外其它点处都是发散的，此时收敛半径$R=0$，(3) 存在有限正数R，级数(2.2)在$|z|<R$内收敛，在$|z|>R$上发散.

为了求级数(2.2)的收敛半径，由收敛圆的几何特性，只须考虑z在正实轴上取值时，求级数$\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|x^n$的收敛半径，这在数学分析中已讲述过，常见的有以下三个法则.

定理 2.2　已知级数$\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$，设

(1) $l=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$，

或　(2) $l=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}$,

或　(3) $l=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}$,

则级数的收敛半径为

$$R=\begin{cases}\dfrac{1}{l}, & 0<l<\infty \\ +\infty, & l=0 \\ 0, & l=\infty\end{cases}$$

上述法则(1),(2),(3) 分别称为达朗贝尔法则,柯西法则与柯西 - 阿达马法则 .

例 1　求下列幂级数的收敛半径,和收敛圆

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+2^n)(z-\mathrm{i})^n$;　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2(2z-1)^n$.

解　(1) 令 $z-\mathrm{i}=\zeta$,级数变为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+2^n)\zeta^n$, $c_n=n+2^n$,而 $l=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}2\sqrt[n]{\dfrac{n}{2^n}+1}=2$, 因此级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+2^n)\zeta^n$ 的收敛半径 $R=\dfrac{1}{2}$, 收敛圆 $|\zeta|<\dfrac{1}{2}$, 故原级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+2^n)(z-\mathrm{i})^n$ 的收敛半径为 $R=\dfrac{1}{2}$, 收敛圆为 $|z-\mathrm{i}|<\dfrac{1}{2}$.

(2) 令 $\rho=2z-1$, 原级数化为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}n^2\zeta^n$, $l=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2}{n^2}=1$,所以其收敛半径为 $R=1$,收敛圆 $|\zeta|<1$, 即原级数在 $|2z-1|<1$ 内收敛,因此级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}n^2(2z-1)^n$ 的收敛圆为 $\left|z-\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{1}{2}$,收敛半径 $R=\dfrac{1}{2}$.

复幂级数和实幂级数相类似，在它们公共的收敛域内可以进行有理运算.

设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$，收敛半径 $R=R_1$.

$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n$，收敛半径 $R=R_2$.

则有

(1) $f(z)\pm g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)z^n$.

(2) $f(z)\cdot g(z)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$，其中 $c_n=a_nb_0+a_{n-1}b_1+\cdots+a_0b_n$.

在上面运算中，所得到的幂级数的收敛半径 $R\geqslant\min(R_1,R_2)$.

(3) 设当 $|z|<R_1$ 时，$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$，若在 $|z|<R$ 内，$\varphi(z)$ 解析，且 $|\varphi(z)|<R_1$ 则 $f[\varphi(z)]=\sum_{n=0}^{\infty}a_n[\varphi(z)]^n$，$|z|<R$.

复幂级数的逐项积分和逐项微分性质与实幂级数相类似，在这里我们仅叙述如下：

定理 2.3 设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$，收敛圆为 $|z|<R$ 则有

(1) $$f'(z)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(c_nz^n)'$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\cdot nz^{n-1},\quad |z|<R,$$

(2) $$\int_0^z f(z)\mathrm{d}z=\int_0^z\left(\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n\right)\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^z c_nz^n\mathrm{d}z$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}z^{n+1},\quad |z|<R.$$

由逐项微分性质还可得出下面结论

定理 2.4 幂级数的和函数是收敛圆内的解析函数.

例 2 (1) 试将函数$\dfrac{1}{z-3}$写成级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-1)^n$的形式.

(2) 求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{n}$的和函数

解 (1) $\dfrac{1}{z-3}=\dfrac{1}{z-1-2}=-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1-\dfrac{z-1}{2}}$,

令$\dfrac{z-1}{2}=\zeta$,我们知道当 $|\zeta|<1$ 时,有$\dfrac{1}{1-\zeta}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\zeta^n$

因此

$$\frac{1}{z-3}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{2^{n+1}}(z-1)^n,\quad |z-1|<2.$$

(2) 级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{n}$的收敛半径$R=1$,设$f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{n}$, ($|z|<1$), 由定理 2.3 知

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}z^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\frac{1}{1-z},\ (|z|<1),$$

令$1-z=\zeta$, 则

$$f'(1-\zeta)=\frac{1}{\zeta},\ |\zeta-1|<1.$$

在 $|\zeta-1|<1$ 内沿 1 到 ζ 的路径积分得

$$\int_1^{\zeta}f'(1-\zeta)\mathrm{d}\zeta=\int_1^{\zeta}\frac{1}{\zeta}\mathrm{d}\zeta,$$

即 $$f(0)-f(1-\zeta)=\ln\zeta,\quad -\pi<\mathrm{Im}\ln\zeta<\pi.$$

由于$f(0)=0$, 所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}=-\ln(1-z),\ |z|<1,\ -\pi<\arg(1-z)<\pi.$$

§ 3 泰勒级数

我们已经知道幂级数的和函数在其收敛圆内是解析函数,现

在讨论相反的问题，证明在圆域内任一解析函数可以表示为幂级数，于是用幂级数来研究解析函数，在理论上和应用中都会带来很大的方便.

3.1 泰勒展式

在实函数中我们已经讨论了函数的泰勒展式，只要 $f(x)$ 满足一定条件，则 $f(x)$ 可写成，

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_n)}{n!}(x-x_0)^n.$$

在复变函数中，我们通过解析函数的柯西积分公式得出与实函数相类似的泰勒展开定理.

定理3.1 设函数 $f(z)$ 在圆域 $|z-a|<R$ 内解析，则有

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n,\ |z-a|<R, \qquad (3.1)$$

且这展式是唯一的，并称(3.1)为函数 $f(z)$ 在 a 点的**泰勒级数**.

证 设圆周 c_R: $|z-a|=R$，对于 c_R 内任一点 z，作圆周 c_r: $|\zeta-a|=r<R$，使 z 含于 c_r 的内部(图3.1)，由柯西公式

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c_r}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta.$$

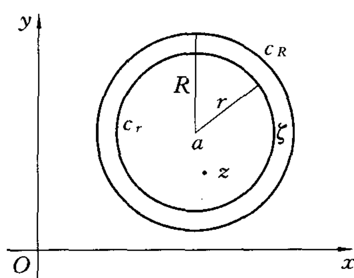


图 3.1

由于要得到 $f(z)$ 的以 $(z-a)$ 为幂的级数展式(3.1)，关键是将 $\frac{1}{\zeta-z}$ 表示为 $(z-a)$ 幂的级数

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta-a-z+a}=\frac{1}{\zeta-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-a}{\zeta-a}}$$

$$=\frac{1}{\zeta-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n,\quad \left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right|<1,$$

上式右边级数关于ζ在c_r上一致收敛，利用逐项积分定理可得

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c_r}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{c_r}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}\cdot(z-a)^n,$$

即

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n.$$

其中

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{c_r}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}=\frac{1}{n!}f^{(n)}(a),$$

由z在C_R内的任意性，r可以扩大到R，上式在$|z-a|<R$内成立.

下面证明展式的唯一性，设在$|z-a|<R$内，有$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$，由逐项微分性质得$f(a)=c_0$，$f'(a)=c_1$，$f''(a)=2!c_2\cdots f^{(n)}(a)=n!c_n\cdots$，因此$c_n=\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$ $(n=0,1,2,\cdots)$，展式(3.1)是唯一的.

泰勒展开定理告诉我们解析函数在其解析圆域内可用幂级数表示，若$f(z)$在区域D内解析，对于D内任一点z_0处的泰勒级数$f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$，其收敛圆半径有多大，应该是以$z_0$为中心在$D$内能作出的最大的圆的半径，因此得到下面推论：

推论 1 设$f(z)$在区域D内解析，$z_0\in D$，c是D的边界，$R=\min\limits_{z\in c}|z-z_0|$，则在$|z-z_0|<R$内有

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n.$$

推论 2 设z_0是函数$f(z)$的解析点，则$f(z)$在z_0点的泰勒展式的收敛半径R等于z_0到$f(z)$最近奇点的距离.

由于$f(z)$在收敛圆内处处解析，因此收敛圆内不可能有$f(z)$的奇点，在收敛圆周上一定有$f(z)$的奇点，否则收敛半径还

可扩大.

3.2 初等函数的泰勒展式

函数在其解析点展开为泰勒级数的方法，可以直接由泰勒定理中公式(3.1)来求，亦可间接的求得. 后者要求我们必须掌握初等函数的泰勒公式，在今后应用中会带来很大的方便.

(1) 指数函数 e^z

因为 $(e^z)^{(n)}|_{z=0}=1$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$，又 e^z 在 z 平面上处处解析，故有

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots, \quad |z| < \infty.$$

(2) 三角函数 $\sin z$ 和 $\cos z$

因为 $(\sin z)^{(k)}=\sin(z+k\cdot\frac{\pi}{2})$，

$$(\cos z)^{(k)}=\cos(z+k\cdot\frac{\pi}{2}),$$

因此

$$(\sin z)^{(k)}|_{z=0} = \begin{cases}(-1)^n, & k=2n+1\\ 0, & k=2n\end{cases}$$

$$(\cos z)^{(k)}|_{z=0} = \begin{cases}(-1)^n, \ k=2n, \\ 0, \ k=2n+1.\end{cases} \qquad n=0,1,2,\cdots$$

故有

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1} + \cdots, |z| < \infty$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n} + \cdots, \ |z| < \infty$$

(3) 函数 $\frac{1}{1+z}$.

$\frac{1}{1+z}$ 的奇点是 $z=-1$，已知 $\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots$ ，$|z|<1$

故$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\cdots+(-1)^n z^n+\cdots$，$|z|<1$

(4) 对数函数 $\ln(1+z)$

$$\ln(1+z)=\int_0^z \frac{1}{1+z}dz$$

$$=z-\frac{z^2}{2}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n+\cdots, |z|<1$$

(5) 幂函数 z^α

$z^\alpha=e^{\alpha \ln z}$是多值函数，若 $\mathrm{Ln}z$ 在除去负实轴的 z 平面上取主值，则得到 z^α 的一个解析分支 $e^{\alpha \ln z}$，下面我们求出它在点 $z=1$的泰勒展式，设 $f(z)=e^{\alpha \ln z}$，$f(1)=1$，则 $f'(z)=\alpha e^{(\alpha-1)\ln z}$，$f''(z)=\alpha(\alpha-1)e^{(\alpha-2)\ln z}\cdots f^{(n)}(z)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)e^{(\alpha-n)\ln z}$，$f^{(n)}(1)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)=c_\alpha^n n!$，$n=1,2\cdots$

所以

$$z^\alpha=1+c_\alpha^1(z-1)+c_\alpha^2(z-1)^2+\cdots+c_\alpha^n(z-1)^n+\cdots, (|z-1|<1)$$

若将 $z-1$易为 z，得

$$(1+z)^\alpha=1+c_\alpha^1 z+c_\alpha^2 z^2+\cdots+c_\alpha^n z^n+\cdots, (|z|<1)$$

例　求 $\sqrt{z+i}$的泰勒展式(取 $\sqrt{i}=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$的分支).

解　$\sqrt{z+i}$的支点为 $z=-i,\infty$，其指定的分支在$|z|<1$内单值解析，所以在$|z|<1$内有

$$\sqrt{z+i}=\sqrt{i}\left(1+\frac{z}{i}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1+i}{\sqrt{2}}\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{i}\right)+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\left(\frac{z}{i}\right)^2+\cdots+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}\left(\frac{z}{i}\right)^n+\cdots\right]$$

$$=\frac{1+i}{\sqrt{2}}\left[1-\frac{i}{2}z+\frac{1}{2\cdot 4}z^2\cdots\right.$$

$$-\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2.4.6\cdots 2n}\mathrm{i}^n z^n\cdots\Big]$$

$$=\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\Big[1-\frac{\mathrm{i}}{2}z-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}\mathrm{i}^n z^n\Big].$$

3.3 解析函数的零点及唯一性定理

定义3.1 设 $f(z)$在区域 D 内解析，若对于 $a\in D$，有$f(a)=f'(a)=f''(a)=\cdots=f^{(m-1)}(a)=0$. 且 $f^{(m)}(a)\neq 0\quad(m\geqslant 1)$，则称 $z=a$ 为 $f(z)$的 m **级零点.**

例如 $z=0$是 $f(z)=z-\sin z$ 的三级零点，因为 $f(0)=f'(0)=f''(0)=0$，而 $f'''(0)=\cos 0=1$.

定理3.2 已知 $f(z)$在 D 内解析，$a\in D$，则 $z=a$ 是 $f(z)$的 m 级零点的充要条件是在 a 点的某个邻域 $N(a,r)$内，$f(z)$可表为

$$f(z)=(z-a)^m\varphi(z),$$

其中 $\varphi(z)$在 $N(a,r)$内的解析，且 $\varphi(a)\neq 0$.

证 必要性：设已知 a 为 $f(z)$的 m 级零点，由定义3.1知 $f(z)$在 a 点解析，且有$f(a)=f'(a)=\cdots=f^{m-1}(a)=0$，而$f^{(m)}(a)\neq 0$，所以

$$f(z)=\frac{f^{(m)}(a)}{m!}(z-a)^m+\frac{f^{(m+1)}(a)}{(m+1)!}(z-a)^{m+1}+\cdots,\ z\in N(a,r)$$

令

$$\varphi(z)=\frac{f^{(m)}(a)}{m!}+\frac{f^{(m+1)}(a)}{(m+1)!}(z-a)+\cdots,$$

显然 $\varphi(a)=\frac{f^{(m)}(a)}{m!}\neq 0$，$\varphi(z)$在 $N(a,r)$内解析. 且有

$$f(z)=(z-a)^m\varphi(z),\ z\in N(a,r)$$

充分性：若已知 $f(z)=(z-a)^m\varphi(z)$，$z\in N(a,r)$，其中 $\varphi(z)$在 $N(a,r)$内解析，且 $\varphi(a)\neq 0$，则据泰勒定理有

$$\varphi(z) = \varphi(a) + \varphi'(a)(z-a) + \frac{\varphi''(a)}{2!}(z-a)^2 + \cdots, \quad z \in N(a,r)$$

于是

$$f(z) = \varphi(a)(z-a)^m + \varphi'(a)(z-a)^{m+1} + \frac{\varphi''(0)}{2!}(z-a)^{m+2} + \cdots, \quad z \in N(a,r)$$

显然

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(m-1)}(a) = 0,$$
$$f^{(m)}(a) = m!\varphi(a) \neq 0,$$

因此 $z=a$ 为 $f(z)$的 m 级零点.

定理3.3 (解析函数零点孤立性定理)

设函数 $f(z)$在区域 D 内解析,$z=a$ 为 $f(z)$的 m 级零点,但 $f(z)$在 D 内不恒为零,则存在 a 的一个邻域 $N(a,\delta)$,使得 $f(z)$在 $N(a,\delta)$内除 a 外无其它零点.

证 已知 $f(z)=(z-a)^m\varphi(z)$, $z\in N(a,r)$,其中 $\varphi(z)$在 $N(a,r)$内解析,$\varphi(a)\neq 0$,显然$|\varphi(a)|\neq 0$,$\varphi(z)$在 a 点连续,因此对于任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,当 $z\in N(a,\delta)$时,有$|\varphi(z)-\varphi(a)|<\varepsilon$,而

$$||\varphi(z)| - |\varphi(a)|| \leqslant |\varphi(z) - \varphi(a)| < \varepsilon,$$

不妨取 $\varepsilon<|\varphi(a)|$, 则

$$0 < |\varphi(a)| - \varepsilon < |\varphi(z)| < |\varphi(a)| + \varepsilon.$$

因而 $\varphi(z)$在 $N(a,\delta)$内没有零点,所以 $f(z)$在 $N(a,\delta)$内除 a 外无其它零点.

由零点孤立性可得到下面的解析函数唯一性定理.

定理3.4 设函数 $f_1(z)$, $f_2(z)$在区域 D 内解析,点集 $E\subset D$ 有一个属于 D 的极限点 a,若 $f_1(z)=f_2(z)$在 E 上成立,则在 D 内必有 $f_1(z)=f_2(z)$.

证 令 $f(z)=f_1(z)-f_2(z)$, $f(z)$在 D 内解析,由连续性知

$f(a)=0$，若 $f(z)$在 D 内不恒为零，则由定理3.3知，存在一邻域 $N(a,\delta)$，使得 $f(z)$在 $N(a,\delta)$内除 a 外无其它零点，这与假设条件相矛盾，因为 $f(z)=0$在 E 上成立，而 a 是 E 的极限点，所以在 a 的任意邻域内都有 E 的点 z，在这点 $f(z)=0$，因此 $f(z)$在 D 内必恒为零，即 $f_1(z)=f_2(z)$.

推论 设函数 $f_1(z)$及 $f_2(z)$在区域 D 内解析，设 $z_k(k=1,2,3,\cdots)$是 D 内彼此不同的点列，且 $z_k\to a\in D$，$f_1(z_k)=f_2(z_k)$，$k=1,2,\cdots$则在 D 内有 $f_1(z)=f_2(z)$.

根据解析函数的唯一性，我们知道若已知某一解析函数在它的定义区域内的某些部份的值，则就可完全确定它在这区域内其它部份的值，这对实变函数来讲不具备这种特性.

3.4 最大模原理

下面我们利用平均值定理及解析函数唯一性定理来证明在解析函数论中占有重要位置的**最大模原理**：

定理3.5 设 $f(z)$在区域 D 内解析，则$|f(z)|$在 D 内任何点都不能达到最大值，除非 $f(z)$在 D 内恒为常数.

证 设在 D 内，$|f(z)|\leqslant M$，且在 D 内某一点 z_0，有$|f(z_0)|=M$，在 D 内作以 z_0为中心，R 为半径的圆域 c_R：$|z-z_0|\leqslant R$，显然 $f(z)$在 c_R 内解析，由平均值定理得到

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{i\varphi})d\varphi,\ (0\leqslant r\leqslant R)$$

于是

$$|f(z_0)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0+re^{i\varphi})|d\varphi.$$

下面我们欲证$|f(z_0+re^{i\varphi})|=M$，事实上，若存在某个值 $\varphi=\varphi_0$有$|f(z_0+re^{i\varphi_0})|<M$，则由$|f(z)|$的连续性知，在充分小的区间 $\varphi_0-\varepsilon<\varphi<\varphi_0+\varepsilon$ 内有$|f(z_0+re^{i\varphi})|<M$，而在上述区间之外，总是$|f(z_0+re^{i\varphi})|\leqslant M$，于是推得

$$M = |f(z_0)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\varphi})| d\varphi < M$$

矛盾. 因此,我们证得了在以点 z_0 为中心的每一个充分小的圆周 C_r 上 $|f(z)|=M$, 即在 z_0 点的圆邻域 c_R 内有 $|f(z)|=M$, 由此可知 $f(z)$ 在 c_R 内为一常数,再由解析函数唯一性定理知 $f(z)$ 在 D 内为一常数.

推论 设函数 $f(z)$ 在有界区域 D 内解析,在闭域 $\overline{D}=D+C$ 上连续,且不为常数,则 $|f(z)|$ 只能在 D 的边界 C 上达到最大值.

§4 罗朗级数

在上一节中我们看到,一个在以 z_0 为中心的圆域内解析的函数 $f(z)$, 可在该圆域内展开成 $z-z_0$ 的幂级数,但若 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 不解析,而在 $z=z_0$ 的邻域中的其它点上都解析,则就不一定能在 $z=z_0$ 处展开为泰勒级数. 下面我们要讨论幂级数的推广,即罗朗级数,它是研究解析函数奇点的重要工具.

4.1 罗朗(laurent)展式

例如函数 $f(z)=\frac{e^z}{z^2}$ 只有一个奇点 $z=0$,在 $0<|z|<+\infty$ 内函数是解析的,由 e^z 的泰勒展式,我们有

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} + \cdots + \frac{z^{n-2}}{n!} + \cdots,$$
$$(0 < |z| < R)$$

这级数中除了有 z 的正幂项外,还有 z 的负幂项.

定义4.1 形如

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n \tag{4.1}$$

的级数称为**罗朗级数**,其中 z 是复变量,a, $c_n(n=0, \pm1, \pm2\cdots)$ 是复常数.

级数(4.1)分为两部分：

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n=c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\cdots$$
$$+c_n(z-a)^n+\cdots, \tag{4.2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}(z-a)^{-n}=c_{-1}(z-a)^{-1}+c_{-2}(z-a)^{-2}+\cdots$$
$$+c_{-n}(z-a)^{-n}+\cdots. \tag{4.3}$$

如果级数(4.2)与(4.3)在点 $z=a$ 都收敛，则称级数(4.1)在点 $z=a$ 收敛.

级数(4.2)是一个幂级数，设其收敛半径为 R. 则它在 $|z-a|<R$ 内绝对收敛，且内闭一致收敛，其和函数在圆 $|z-a|<R$ 内解析.

级数(4.3)全是负幂项组成，若令 $\zeta=\dfrac{1}{z-a}$，则它成为幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}\zeta^n=c_{-1}\zeta+c_{-2}\zeta^2+\cdots+c_{-n}\zeta^n+\cdots. \tag{4.4}$$

设级数(4.4)的收敛半径为 μ. 则级数(4.4)在 $|\zeta|<\mu$ 内绝对收敛，且内闭一致收敛，其和函数收敛于一解析函数，换回原来的变量，则级数(4.3)在 $r=\dfrac{1}{\mu}<|z-a|<+\infty$ 内绝对收敛，且内闭一致收敛，其和函数收敛于一解析函数.

综上所述，当 $r<R$ 时，级数(4.1)在圆环域 $r<|z-a|<R$ 内绝对收敛，且内闭一致收敛，其和函数解析.

当 $r>R$ 时，级数(4.1)处处发散.

当 $r=R$ 时，除圆周 $|z-a|=R$ 上的点外，级数(4.1)处处发散.

例如 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\dfrac{z^n}{n^2}(n\neq 0)$，在圆周 $|z|=1$ 上处处收敛，在其它点都发散，级数 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}z^n$ 在 z 平面上处处发散.

我们称级数(4.2)为罗朗级数(4.1)的**解析部分**，称级数(4.3)为罗朗级数(4.1)的**主要部分**或**奇异部分**.

可把上述讨论结果归纳为

定理 4.1 设罗朗级数 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ 的收敛圆环为 $D: r<|z-a|<R$，则它在 D 内绝对收敛，且内闭一致收敛，其和函数 $f(z)$ 在 D 内解析.

下面我们证明定理 4.1 的逆定理.

定理 4.2 （罗朗定理） 设函数 $f(z)$ 在圆环域 D: $r<|z-a|<R$, $(0\leqslant r<R<+\infty)$ 内解析，则有

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n, \quad z\in D, \tag{4.5}$$

其中

$$c_n=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{|\zeta-a|=\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta,$$

$$r<\rho<R,\ n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots \tag{4.6}$$

称 c_n 为罗朗系数.

证 对于 D 内任一点 z，取 $\rho_2<\rho_1$，且满足 $r<\rho_2<\rho_1<R$，使 z 含于圆环域 G: $\rho_2<|z-a|<\rho_1$ 内，再令 c_{ρ_1}: $|\zeta-a|=\rho_1$, c_{ρ_2}: $|\zeta-a|=\rho_2$（图4.1所示），由柯西积分公式得

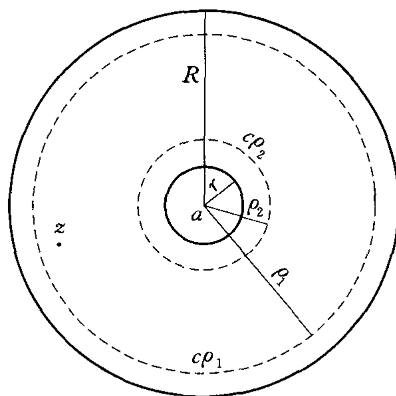


图 4.1

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c_{\rho_1}+c_{\rho_2}^-}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{c_{\rho_1}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{c_{\rho_2}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta. \tag{4.7}$$

当 $\zeta\in c_{\rho_1}$ 时，

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-a)\left(1-\frac{z-a}{\zeta-a}\right)}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}. \tag{4.8}$$

由于 $\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right|=\frac{|z-a|}{\rho_1}<1$，所以(4.8)式右边的级数在 c_{ρ_1} 上一致收敛.

当 $\zeta\in c_{\rho_2}$ 时

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{-1}{(z-a)\left(1-\frac{\zeta-a}{z-a}\right)}$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\zeta-a)^{n-1}}{(z-a)^n}, \tag{4.9}$$

由于 $\left|\frac{\zeta-a}{z-a}\right|=\frac{\rho_2}{|z-a|}<1$，所以(4.9)式右边的级数在 c_{ρ_2} 上一致收敛. 将(4.8)与(4.9)式代入(4.7)，然后逐项积分得到

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{c_{\rho_1}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta\cdot(z-a)^n$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{c_{\rho_2}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{-n+1}}d\zeta\cdot(z-a)^{-n}.$$

由关于复合闭路的柯西定理可知，上式中两个积分的积分路线 c_{ρ_1} 与 c_{ρ_2} 都可换成沿着圆周 $|\zeta-a|=\rho$，再据(4.6)得到

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}(z-a)^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-a)^n.$$

可以证明 $f(z)$ 在圆环域 D 内的罗朗级数是唯一的. 事实上，若在 D 内有另一展式

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n(z-a)^n, \tag{4.10}$$

用 $\frac{1}{(z-a)^{m+1}}$ 乘(4.10)式的两边，然后在 $|z-a|=\rho$ 上积分，有

$$\int_{|z-a|=\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{m+1}}dz=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n\int_{|z-a|=\rho}(z-a)^{n-m-1}dz$$

$$=\begin{cases}2\pi i d_n, & m=n\\ 0\ \ , & m\neq n\end{cases}$$

于是

$$d_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\rho}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz,\ n=0,\ \pm 1,\ \pm 2\cdots .$$

例1 求函数 $f(z)=\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$ 在圆环域：(1) $0<|z|<1$ (2) $1<|z|<2$ (3) $2<|z|<+\infty$ 内的罗朗级数.

解 函数 $f(z)=\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$ 在 z 平面上有三个奇点 $2, i, -i$. 因此在题中所指出的三个圆环内函数 $f(z)$ 是处处解析的.

我们先将 $f(z)$ 分解为部分分式之和

$$f(z)=\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}=\frac{1}{z-2}-\frac{2}{z^2+1}.$$

(1) 在 $0<|z|<1$ 内，显然有 $\left|\frac{z}{2}\right|<1$ 和 $|z^2|<1$

$$\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}$$

$$=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}+\cdots+\frac{z^n}{2^n}+\cdots\right),$$

$$\frac{-2}{z^2+1}=-2(1-z^2+z^4-z^6+\cdots+(-1)^n z^{2n}+\cdots),$$

因此有

$$\frac{z^2-2z-5}{(z-2)(z^2+1)}=\left(-\frac{1}{2}-\frac{z}{2^2}-\frac{z^2}{2^3}-\cdots-\frac{z^n}{2^{n+1}}\cdots\right)$$

$$+(-2+2z^2-2z^4+\cdots$$

$$+(-1)^{n+1}2z^{2n}+\cdots)$$

$$=-\frac{5}{2}-\frac{z}{4}+\frac{15}{8}z^2-\frac{1}{16}z^3\cdots.$$

在展式中没有 z 的负幂项，这是因为函数 $f(z)$ 在 $z=0$ 处是解析的，在 $0<|z|<1$ 内的罗朗级数就是 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内的泰勒级数，因此泰勒级数是罗朗级数的特殊情形.

(2) 在 $1<|z|<2$ 内

$$f(z)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}-\frac{2}{z^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z^2}}$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n-\frac{2}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z^2}\right)^n$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}z^n+\sum_{n=1}^{\infty}2(-1)^n\frac{1}{z^{2n}}.$$

(3) 当 $2<|z|<+\infty$ 时

$$f(z)=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}-\frac{2}{z^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z^2}}$$

$$=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^n}-\frac{2}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{2n}}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{z^{2n}},$$

因此

$$f(z)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{c_{-m}}{z^m},$$

其中

$$c_{-m}=\begin{cases}2^{2n-2}, & m=2n-1\\ 2^{2n-1}+2(-1)^n. & m=2n.\end{cases}\quad (n=1,2,\cdots)$$

本题若用罗朗公式求 c_n，计算就很复杂，我们经常用间接的方法来求罗朗级数. 对同一函数来说，它在不同的解析圆环内的罗朗级数亦是不相同的，这一点与唯一性没有矛盾.

例2 求$\dfrac{\mathrm{Ln}z}{z^2-1}$的解析分支在$0<|z-1|<1$内的罗朗展式.

解 多值函数 Lnz 的支点为$0,\infty$，沿负实轴割开后，它在$|z-1|<1$内可分出解析分支，取 $\mathrm{Ln}1=0$那一分支，并记此分支为$\ln z$，则当$0<|z-1|<1$时，有

$$\begin{aligned}\frac{\ln z}{z^2-1}&=\frac{1}{z-1}\ln[1+(z-1)]\frac{1}{2\left(1+\frac{z-1}{2}\right)}\\&=\frac{1}{2(z-1)}\left[(z-1)+(-1)\frac{(z-1)^2}{2}+\cdots\right.\\&\quad\left.+(-1)^{n-1}\frac{(z-1)^n}{n}+\cdots\right]\\&\quad\cdot\left[1+(-1)\frac{z-1}{2}+(-1)^2\frac{(z-1)^2}{2^2}+\cdots\right.\\&\quad\left.+(-1)^n\frac{(z-1)^n}{2^n}+\cdots\right]\\&=\frac{1}{2}\left[1+(-1)\frac{z-1}{2}+(-1)^2\frac{(z-1)^2}{3}+\cdots\right.\\&\quad\left.+\frac{(-1)^n(z-1)^n}{n+1}+\cdots\right]\\&\quad\cdot\left[1+(-1)\frac{z-1}{2}+(-1)^2\frac{(z-1)^2}{2^2}+\cdots\right.\\&\quad\left.+(-1)^n\frac{(z-1)^n}{2^n}+\cdots\right]\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\frac{(-1)^{n-k}}{2^{n-k}}\right](z-1)^n\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^n 2^k}{k+1}\right]\frac{(z-1)^n}{2^n}.$$

4.2 解析函数的孤立奇点

定义4.2 若函数 $f(z)$ 在 a 点的某个去心邻域：$0<|z-a|<\delta$ 内解析，在 a 点不解析，就称 a 是 $f(z)$ 的**孤立奇点**.

由罗朗定理知道，在 $0<|z-a|<\delta$ 内有

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}(z-a)^{-n},$$

下面从上述罗朗级数的主要部分

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}(z-a)^{-n}, \tag{4.11}$$

给奇点进行分类：

(1) 若主要部分(4.11)式中 $c_{-n}=0$，$(n=1,2,\cdots)$，则称点 $z=a$ 为 $f(z)$ 的**可去奇点**.

(2) 存在某个正数 $m\geqslant 1$，$c_{-m}\neq 0$，而对一切 $n>m$，有 $c_{-n}=0$，此时称 $z=a$ 为 $f(z)$ 的 **m 级极点**.

(3) 若主要部分(4.11)中有无穷多个 $c_{-n}\neq 0$，此时称 $z=a$ 为 $f(z)$ 的**本性奇点**.

下面研究各类孤立奇点的性质

设 $z=a$ 是 $f(z)$ 的可去奇点，则在某个去心邻域 $0<|z-a|<\delta$ 内，$f(z)$ 的罗朗展式中主要部分为零，即

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n,\ 0<|z-a|<\delta.$$

令

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n,\ |z-a|<\delta,$$

则 $F(a)=c_0$，$F(z)$ 在 $|z-a|<\delta$ 内解析，则

$$\lim_{z\to a}f(z)=\lim_{z\to a}F(z)=F(a)=c_0.$$

由此可重新或补充定义 $f(a)=c_0$，于是 $f(z)=F(z)$ 在

$N(a,\delta)$内解析.综上所述,我们得到$z=a$为$f(z)$的可去奇点的三个等价条件.

定理4.3 若a是$f(z)$的孤立奇点,则a是$f(z)$的可去奇点时下面三条件等价.

(1) $f(z)$在a点的主要部分为零,

(2) $\lim\limits_{z\to a}f(z)=c_0$,

(3) $f(z)$在$N(a,\delta)-\{a\}$内有界.

证 我们已在上面由(1)推得(2),再由极限的$\varepsilon-\delta$描述易推得(3),下面由(3)推得(1)成立,设$f(z)$在$N(a,\delta)-\{a\}$内有罗朗展式$f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-a)^n$,其中$c_n=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|\zeta-a|=\rho}\dfrac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta$, $0<\rho<\delta$,且ρ可任意小.现设$|f(z)|\leqslant M$,在$0<|z-a|<\delta$内,则

$$|c_n|\leqslant\frac{1}{2\pi}\frac{M}{\rho^{n+1}}2\pi\rho=\frac{M}{\rho^n}.$$

当$n=-1,-2,-3\cdots$时,在上式中令$\rho\to0$,就得到$c_n=0$,于是$f(z)$在a点的主要部分等于零,故a为$f(z)$的可去奇点.

若a是$f(z)$的m级极点,则$f(z)$的罗朗展式为

$$f(z)=\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}+\frac{c_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-a}$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n,\quad 0<|z-a|<\delta$$

即
$$f(z)=\frac{1}{(z-a)^m}\psi(z).$$

其中 $\psi(z)=c_{-m}+c_{-m+1}(z-a)+\cdots+c_{-1}(z-a)^{m-1}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^{n+m}$.

显然$\psi(z)$在a点解析,且$\psi(a)=c_{-m}\neq0$,从而得出a为$f(z)$的m级极点的三个等价条件.

定理4.4 若 a 为 $f(z)$ 的孤立奇点，则 a 为 $f(z)$ 的 m 级极点时，下面三个条件等价

(1) $f(z)$ 在 a 点的主要部分只有有限多项，

$$\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}+\frac{c_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-a},(c_{-m}\neq 0).$$

(2) $f(z)=\dfrac{\psi(z)}{(z-a)^m}$，$0<|z-a|<\delta$，其中 $\psi(z)$ 在 a 点解析，且 $\psi(a)\neq 0$.

(3) $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ 以 $z=a$ 为 m 级零点，(可去奇点按解析点看).

证 由(1)已推得(2)，下面由(2)来推证(3). 由于

$$g(z)=\frac{1}{f(z)}=\frac{(z-a)^m}{\psi(z)}=(z-a)^m\varphi(z)$$

其中 $\varphi(z)=\dfrac{1}{\psi(z)}$，而 $\varphi(a)=\dfrac{1}{\psi(a)}\neq 0$，显然 $\varphi(z)$ 在 a 点解析，因此，据本章定理3.2可知 $z=a$ 为 $g(z)$ 的 m 级零点.

现在再由(3)来推证(1)成立：

设 $\dfrac{1}{f(z)}$ 以 $z=a$ 为 m 级零点，于是在 $N(a,\delta)$ 内有 $\dfrac{1}{f(z)}=(z-a)^m\varphi(z)$，其中 $\varphi(z)$ 在 $N(a,\delta)$ 中解析，且 $\varphi(a)\neq 0$，由解析函数零点孤立性，可将邻域 $N(a,\delta)$ 缩小为 $N(a,r)$，使 $\varphi(z)$ 在 $N(a,r)$ 内无零点.

$f(z)=\dfrac{1}{(z-a)^m}\cdot\dfrac{1}{\varphi(z)}=\dfrac{\psi(z)}{(z-a)^m}$，显然 $\psi(z)$ 在 a 点解析，且 $\psi(a)=\dfrac{1}{\varphi(a)}\neq 0$，由泰勒定理在 $N(a,r)$ 邻域内有

$$\psi(z)=\psi(a)+\psi'(a)(z-a)+\frac{1}{2!}\psi''(a)(z-a)^2+\cdots$$
$$+\frac{\psi^{m-1}(a)}{(m-1)!}(z-a)^{m-1}+\frac{\psi^{(m)}(a)}{m!}(z-a)^m+\cdots,$$

则

$$f(z)=\frac{\psi(a)}{(z-a)^m}+\frac{\psi'(a)}{(z-a)^{m-1}}+\cdots$$

$$+\frac{\psi^{(m-1)}(a)}{(m-1)!(z-a)}+\frac{\psi^{(m)}(a)}{m!}$$
$$+\frac{\psi^{(m+1)}(a)}{(m+1)!}(z-a)+\cdots.$$

其主要部分为

$$\frac{\psi(a)}{(z-a)^m}+\frac{\psi'(a)}{(z-a)^{m-1}}+\cdots+\frac{\psi^{(m-1)}(a)}{(m-1)!(z-a)},\ (\psi(a)\neq 0)$$

故(1)成立.

定理4.5 设 $f(z)$在$0<|z-a|<\delta$ 内解析,则 a 为 $f(z)$的极点的充要条件是$\lim\limits_{z\to a}f(z)=\infty$.

证 不妨设 a 为 $f(z)$的 m 级极点,必要性显然,现证充分性:设$\lim\limits_{z\to a}f(z)=\infty$,则存在$0<r\leqslant\delta$ 使得在$0<|z-a|<r$ 内 $f(z)\neq 0$,于是 $F(z)=\dfrac{1}{f(z)}$在$0<|z-a|<r$ 内解析且不等于零,而$\lim\limits_{z\to a}F(z)=\lim\limits_{z\to a}\dfrac{1}{f(z)}=0$,所以 a 是 $F(z)$的一个可去奇点.从而在$0<|z-a|<r$ 内 $F(z)$有罗朗展式

$$F(z)=\beta_0+\beta_1(z-a)+\cdots+\beta_n(z-a)^n+\cdots$$

其中 $\beta_0=\lim\limits_{z\to a}F(z)=0$,由于在$0<|z-a|<r$ 内 $F(z)\neq 0$,由解析函数零点孤立性定理知 a 为 $F(z)$的唯一零点,不妨设它为 m 级零点,即 $F(z)=(z-a)^m\varphi(z)$,其中 $\varphi(z)$在$|z-a|<r$ 内解析且$\varphi(a)\neq 0$,于是在$0<|z-a|<r$ 内有 $f(z)=\dfrac{1}{(z-a)^m\varphi(z)}=\dfrac{1}{(z-a)^m}\psi(z)$,其中$\psi(z)$在$|z-a|<r$ 内解析,$\psi(a)=\dfrac{1}{\varphi(a)}\neq 0$,所以 a 为$f(z)$的 m 级极点.

例如 $f(z)=\dfrac{5z+1}{(z-1)(2z+1)^2}$,$z=1$为 $f(z)$的一极点,$z=-\dfrac{1}{2}$为 $f(z)$的二级极点.

$g(z)=\dfrac{\sin z}{e^z-1}$,$z=0$为 $g(z)$的可去奇点,$z=2k\pi i$,($k=\pm 1$,± 2,$\cdots$)为 g 的一级极点.由本性奇点的定义和上面对可去奇点,

m 级极点性质的讨论立即可得出：

定理4.6 $f(z)$的孤立奇点 a 为其本性奇点时，下列两条件等价

(1) $f(z)$在 a 点的主要部分有无穷多项

(2) $\lim\limits_{z\to a}f(z)$不存在(亦不属于∞形)

例如0是 $e^{\frac{1}{z}}$的本性奇点.

函数在其本性奇点处是很复杂的，维尔斯脱拉斯在1876年曾证明了对于任何复常数 A，不管它是有限数还是无穷，函数 $f(z)$在本性奇点 a 附近，总存在收敛于 a 的点列$\{z_n\}$，使$\lim\limits_{n\to\infty}f(z_n)=A$，毕卡在1879年进一步证明了：至多除了一个例外复数值 A_0，函数 $f(z)$在其本性奇点的邻域内可以无穷多次地取得任何一个复数值 $A(A\neq A_0)$.

例如 $f(z)=\sin\dfrac{1}{z}$，$z=0$是其本性奇点，任取复数 $A\neq\infty$，要使 $\sin\dfrac{1}{z}=A$，即$\dfrac{1}{z}=\mathrm{Arcsin}A=\dfrac{1}{\mathrm{i}}\mathrm{Ln}(\mathrm{i}A+\sqrt{1-A^2})$，

$$z=\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{Ln}(\mathrm{i}A+\sqrt{1-A^2})}$$

$$=\frac{\mathrm{i}}{\ln(\mathrm{i}A+\sqrt{1-A^2})+2k\pi\mathrm{i}},\ (k=0,\pm1,\cdots)$$

取 $$z_n=\frac{\mathrm{i}}{\ln(\mathrm{i}A+\sqrt{1-A^2})+2n\pi\mathrm{i}},\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

显然 $f(z_n)=A$，而$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=0$，即在0点附近，函数多次地达到值 A.

4.3 解析函数在无穷远点的性质

定义4.3 设函数 $f(z)$在区域 $D:R<|z|<+\infty,(R\geqslant0)$内解析，则无穷远点称为 $f(z)$的**孤立奇点**.

为了研究 $f(z)$在无穷远点的性质，令 $\zeta=\dfrac{1}{z}$，将 $z=\infty$的邻域

变为点 $\zeta=0$ 的邻域，函数 $\varphi(\zeta)=f\left(\dfrac{1}{\zeta}\right)=f(z)$，在邻域 $0<|\zeta|<\dfrac{1}{R}$ 内解析，$\zeta=0$ 是它的一个孤立奇点，因此 $\varphi(\zeta)$ 有罗朗展式

$$\varphi(\zeta)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n\zeta^n,\ \left(0<|\zeta|<\frac{1}{R}\right),$$

换回原来变量 z 有

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\alpha_n z^n,\quad 其中\ \alpha_n=c_{-n},\quad (n=0,\pm 1,\cdots)$$

由于在对应的点 z 与 ζ 上，函数 $f(z)$ 与 $\varphi(\zeta)$ 的值相等，且 $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=\lim\limits_{\zeta\to 0}\varphi(\zeta)$，因此我们可根据 $\varphi(\zeta)$ 在原点的性态来规定函数 $f(z)$ 在无穷远点的性态，若 $\zeta=0$ 为 $\varphi(\zeta)$ 的可去奇点，m 级极点或本性奇点，则我们相应地称 $z=\infty$，为 $f(z)$ 的**可去奇点**，m **级极点或本性奇点**.

我们称级数 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_n z^n$ 为 $f(z)$ 在无穷远点去心邻域 $N-\{\infty\}$：$0<R<|z|<+\infty$ 内的**罗朗展式**，我们称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n z^n$ 为 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 的**主要部份**.

综上所述，我们不难得出对应于定理4.3，4.4及4.5及4.6的下面四条定理：

定理4.7 $f(z)$ 的孤立奇点 $z=\infty$ 为可去奇点的充要条件是下列三条中的任一条成立：

(1) $f(z)$ 在 $z=\infty$ 的主要部分为零

(2) $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=b\ (\neq\infty)$

(3) $f(z)$ 在 $z=\infty$ 的某去心邻域 $N-\{\infty\}$ 内有界.

定理4.8 $f(z)$ 的孤立奇点 $z=\infty$ 为 m 级极点的充要条件是下列三条中的任一条成立.

(1) $f(z)$ 在 $z=\infty$ 的主要部分为

$$\alpha_1 z+\alpha_2 z^2+\cdots\alpha_m z^m,\ (\alpha_m\neq 0).$$

(2) $f(z)$在 $z=\infty$的某去心邻域 $N-\{\infty\}$内能表成 $f(z)=\psi(z)z^m$ 其中 $\psi(z)$在 $z=\infty$的邻域 N 内解析，且 $\psi(\infty)\neq 0$.

(3) $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$以 $z=\infty$为 m 级零点.

同样有结论：$z=\infty$为 $f(z)$的极点充要条件是$\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=\infty$.

定理4.9 $f(z)$的孤立奇点∞为本性奇点的充要条件是下列两条中的任一条成立：

(1) $f(z)$在 $z=\infty$的主要部分有无穷多项不等于零.

(2) $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)$不存在.

例如$\dfrac{1}{z(z+1)}=\dfrac{1}{z^2}-\dfrac{1}{z^3}+\dfrac{1}{z^4}-\dfrac{1}{z^5}+\cdots,1<|z|<+\infty$,因此 $z=\infty$是可去奇点.

$$z^2\sin\frac{1}{z}=z-\frac{1}{3!z}+\frac{1}{5!z^3}\cdots,\ 0<|z|<+\infty$$

因此 $z=\infty$为其一级极点.

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots,\ |z|<\infty$$

因此 $z=\infty$为其本性奇点.

4.4 整函数与亚纯函数概念

定义4.4 在整个 z 平面上解析的函数 $f(z)$称为**整函数**，若函数 $f(z)$在 z 平面上除去有极点外，到处解析，则称 $f(z)$为**亚纯函数**.

显然无穷远点是整函数的孤立奇点，在$|z|<\infty$内，$f(z)$的罗朗展式就是泰勒展式 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n z^n$，由此可得以下三个结论：

(1) 当 $f(z)$为常数时，$z=\infty$为它的可去奇点.

(2) 当 $f(z)$为 m 次多项式时，则 $z=\infty$为它的 m 阶极点.

(3) 当 $f(z)$为其它函数，(称之为**超越整函数**)，则 $z=\infty$为它的本性奇点.

例如 e^z, $\sin z$, $\cos z$ 等都是超越整函数，$z=\infty$为它们的本性奇点.

根据定理4.7，立即可得刘维尔定理：

定理4.10 有界整函数一定恒等于常数.

利用刘维尔定理很容易证明代数基本定理：任何 $n(n\geqslant 1)$次代数方程至少有一根(证明留作习题).

有理函数 $f(z)=\dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)}$是亚纯函数，其中 $P_n(z)$, $Q_m(z)$是两个既约多项式

$$P_n(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \cdots + \alpha_n z^n, \quad \alpha_n \neq 0$$

$$Q_m(z) = \beta_0 + \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \cdots + \beta_m z^m, \quad \beta_m \neq 0$$

$Q_m(z)$的零点是 $f(z)$的极点，在 z 平面上除去这有限个极点外，$f(z)$是解析的，由于

$$f(z) = \frac{1}{z^{m-n}} \frac{\alpha_n + \dfrac{\alpha_{n-1}}{z} + \cdots + \dfrac{\alpha_0}{z^n}}{\beta_m + \dfrac{\beta_{m-1}}{z} + \cdots + \dfrac{\beta_0}{z^m}},$$

所以

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \begin{cases} \dfrac{\alpha_n}{\beta_m}, & n = m \\ \infty, & n > m \\ 0, & n < m \end{cases}$$

即 $z=\infty$或是 $f(z)$的可去奇点，或是 $f(z)$的极点，我们还可证得：若 $z=\infty$是亚纯函数 $f(z)$的可去奇点或极点，则 $f(z)$必是**有理函数**.(证略)

有理函数为亚纯函数，它在 z 平面上只有有限个极点，非有理函数的亚纯函数称为超越亚纯函数，它在 z 平面上有无穷多个极点，例如$\dfrac{z}{e^z-1}$是超越亚纯函数，其极点为 $z=2k\pi i$, $k=\pm 1$, ± 2, $\cdots$. 注意此处 $k\neq 0$，若 $k=0$，则 $z=0$为$\dfrac{z}{e^z-1}$的可去奇点. $z=$

∞是极点的极限点，因此 $z=\infty$不是孤立奇点，对于超越亚纯函数，若存在它的极点的极限点，则此极限点必为∞点，事实上，设$\{z_k\}$为 $f(z)$的极点，若$\lim\limits_{k\to\infty}z_k=a\neq\infty$，则 $f(z)$存在非孤立奇点 a，这与亚纯函数的定义相矛盾.

第五章　留数理论及其应用

留数在复变函数中是一个很重要的概念，它与解析函数在孤立奇点处的罗朗展式有密切关系，应用留数理论可以较容易地计算实函数中某些积分，解决积分中的某些疑难问题，并且亦可用来计算函数 $f(z)$ 在闭曲线内的零点和极点的个数，在理论上和实际问题中，留数有着极重要的应用.

§1　留数及其计算

1.1　留数的基本概念

根据柯西定理，我们知道若函数 $f(z)$ 在 a 的邻域 $N(a,r)$ 内解析，Γ 为 $N(a,r)$ 内任一简单闭曲线，则 $\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$，但是，若 a 为 $f(z)$ 的一个孤立奇点，则 $f(z)$ 沿在 a 的某个去心邻域 $0 < |z-a| < r$ 内包含 a 的任一条简单闭曲线 Γ 的积分一般就不等于零，设 $f(z)$ 在 a 点的去心邻域内的罗朗展式为 $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$，$0 < |z-a| < r$，对此展式的两端沿 Γ 逐项积分得 $\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} c_{-1}$，由此得出留数的定义.

定义 1.1　设 $f(z)$ 在 $0 < |z-a| < r$ 内解析，a 是 $f(z)$ 的孤立奇点，曲线 Γ 是正向圆周 $|z-a| = \rho < r$，称积分 $\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z$ 为函数 $f(z)$ 在 $z=a$ 点的**留数**（或**残数**），记为

$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)$，或 $\operatorname{Res}[f(z),a]$.

由柯西定理知道，定义中留数不依赖于圆周 Γ 的半径，即使 Γ 不是圆周，只要 Γ 内部包含 a 点，且 Γ 含于 $N(a,r)$ 内的任一条闭曲线都行. 综上所述可得

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z = c_{-1}.$$

当 a 为 $f(z)$ 的可去奇点时，则 $\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)=0$.

例1 求 $\operatorname*{Res}_{z=\pi} \dfrac{\sin z}{z-\pi}$.

解

$$\begin{aligned}
\frac{\sin z}{z-\pi} &= \frac{-\sin(z-\pi)}{z-\pi} \\
&= \frac{-1}{z-\pi}\Big[(z-\pi) - \frac{1}{3!}(z-\pi)^3 \\
&\quad + \frac{1}{5!}(z-\pi)^5 + \cdots\Big] \\
&= -1 + \frac{(z-\pi)^2}{3!} - \frac{(z-\pi)^4}{5!} + \cdots, \\
&\quad 0 < |z-\pi| < +\infty
\end{aligned}$$

因此

$$\operatorname*{Res}_{z=\pi} \frac{\sin z}{z-\pi} = c_{-1} = 0.$$

1.2 留数基本定理

定理1.1 若函数 $f(z)$ 在区域 D 内除有限多个孤立奇点 a_1，$a_2 \cdots a_n$ 外处处解析，曲线 c 是 D 内的包含这些奇点于其内部的任一条正向简单的闭曲线，且 c 的内部全含于 D，则

$$\int_c f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z).$$

证 以 $f(z)$ 的孤立奇点 a_k 为中心，在 c 内作小圆周 $c_k(k=1,2,\cdots)$ 且它们互不包含和互不相交，这些圆周及它们的内部全含于

D,如图1.1所示.

$$\Gamma = c = c_1^- + c_2^- + \cdots + c_n^-,$$

由复合闭路上的柯西定理知:

$$\int_c f(z)\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n}\int_{c_k} f(z)\mathrm{d}z$$

$$= 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z).$$

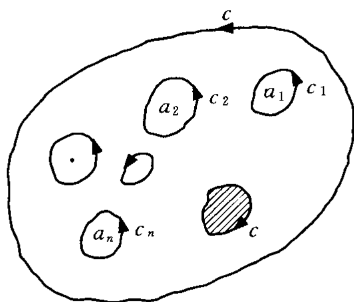


图 1.1

留数定理将积分 $\int_c f(z)\mathrm{d}z$ 转化为计算被积函数 $f(z)$ 在 c 内部各孤立奇点处的留数,把整体化为局部.因而有效地计算孤立奇点处的留数是应用这定理的关键,一般由罗朗级数中 $c_{-1}(z-a)^{-1}$ 项的系数 c_{-1} 来得出留数$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = c_{-1}$,当 a 是 $f(z)$的本性奇点时,这方法特别实用,当 a 是 $f(z)$的较低级极点时,我们还有另外的方法来计算留数,下面给出极点处留数的计算法,这方法对一、二级极点非常方便.

定理1.2 设 a 为 $f(z)$的 m 级极点,则

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-a)^m f(z)]. \quad (1.1)$$

证 因为 a 为 $f(z)$的 m 级极点,因此 $f(z)$在$0<|z-a|<\delta$ 内的罗朗级数为

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}} + \cdots$$

$$+ \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a)$$

$$+ c_2(z-a)^2 + \cdots, \quad c_{-m} \neq 0$$

两边同乘以$(z-a)^m$ 得

$$(z-a)^m f(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z-a) + \cdots + c_{-1}(z-a)^{m-1}$$

$$+ c_0(z-a)^m + c_1(z-a)^{m+1} + \cdots,$$

对上式两边求 $m-1$阶导数,且令 $z\to a$ 得

$$\lim_{z\to a}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-a)^m f(z)]=(m-1)!c_{-1}.$$

因此

$$\operatorname*{Res}_{z=a}f(z)=c_{-1}=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-a)^m f(z)].$$

公式的另一种形式是在$0<|z-a|<\delta$内有

$$f(z)=\frac{\psi(z)}{(z-a)^m},$$

其中$\psi(z)$在a点解析，且$\psi(a)\neq 0$，于是

$$\lim_{z\to a}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-a)^m f(z)]=\psi^{m-1}(a),$$

所以

$$\operatorname*{Res}_{z=a}\frac{\psi(z)}{(z-a)^m}=\frac{1}{(m-1)!}\psi^{(m-1}(a).$$

推论1　若a为$f(z)=\dfrac{\psi(z)}{z-a}$的一级极点，其中$\psi(z)$在$a$点解析，则

$$\operatorname*{Res}_{z=a}f(z)=\psi(a).$$

推论2　若a是$f(z)=\dfrac{\psi(z)}{(z-a)^2}$的二级极点，其中$\psi(z)$在$a$点解析，则

$$\operatorname*{Res}_{z=a}f(z)=\psi'(a).$$

推论3　若$f(z)=\dfrac{\psi(z)}{g(z)}$，其中$\psi(z)$，$g(z)$在$a$点解析，且$\psi(a)\neq 0$，同时$a$是$g(z)$的一级零点，则$\operatorname*{Res}_{z=a}f(z)=\dfrac{\psi(a)}{g'(a)}$.

证　由给出的条件知$z=a$是$f(z)$的一级极点，且$g(a)=0$，$g'(a)\neq 0$.

因此

$$\operatorname*{Res}_{z=a}f(z)=\lim_{z\to a}(z-a)\frac{\psi(z)}{g(z)}=\lim_{z\to a}\frac{\psi(z)}{\dfrac{g(z)-g(a)}{z-a}}=\frac{\psi(a)}{g'(a)}.$$

例1 求$\operatorname*{Res}_{z=0}\dfrac{1}{z(e^z-1)}$.

解 $z=0$是$\dfrac{1}{z(e^z-1)}$的二级极点

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{1}{z(e^z-1)}=\lim_{z\to 0}\left[z^2\frac{1}{z(e^z-1)}\right]'$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1-ze^z}{(e^z-1)^2}=-\frac{1}{2}.$$

另一法：

$$\frac{1}{z(e^z-1)}=\frac{1}{z^2\left(1+\dfrac{1}{2!}z+\dfrac{1}{3!}z^2+\cdots\right)},$$

令

$$\psi(z)=\frac{1}{1+\dfrac{1}{2!}z+\dfrac{1}{3!}z^2+\cdots},$$

在$z=0$处解析，由推论2得

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{1}{z(e^z-1)}=\psi'(z)\big|_{z=0}=-\frac{1}{2}.$$

例2 求$f(z)=\dfrac{1}{z^2\sin z}$在各孤立奇点处的留数.

解 $z=0$是$f(z)$的三级极点，$z=n\pi(n=\pm1,\pm2,\cdots)$是$f(z)$的一级极点.

由推论3

$$\operatorname*{Res}_{z=n\pi}f(z)=\operatorname*{Res}_{z=n\pi}\frac{\frac{1}{z^2}}{\sin z}=\frac{\frac{1}{z^2}}{\cos z}\Bigg|_{z=n\pi}$$

$$=\frac{(-1)^n}{(n\pi)^2}.\quad (n=\pm 1,\pm 2\cdots)$$

用公式(1.1)计算$\operatorname*{Res}_{z=0}f(z)$较繁，我们通过罗朗展式求$c_{-1}$得出留数.

$$\frac{1}{z^2\sin z}=\frac{1}{z^3}\frac{1}{\left(1-\dfrac{z^2}{3!}+\dfrac{z^4}{5!}\cdots\right)}$$

$$=\frac{1}{z^3}\left[1+\left(\frac{z^2}{3!}-\frac{z^4}{5!}+\cdots\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{z^2}{3!}-\frac{z^4}{5!}+\cdots+\right)^2+\cdots\right]$$

$$0<|z|<\pi$$

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{1}{z^2\sin z}=c_{-1}=\frac{1}{3!}=\frac{1}{6}.$$

例3 计算积分 $\int_{|z|=n}\operatorname{tg}\pi z\mathrm{d}z$. （$n$ 为自然数）

解 $\operatorname{tg}\pi z=\frac{\sin\pi z}{\cos\pi z}$，孤立奇点为 $\pi z=k\pi+\frac{\pi}{2}$ 即 $z_k=k+\frac{1}{2}$，$(k=0,\pm 1,\pm 2\cdots)$ 为一级极点，在圆 $|z|=n$ 内有 $2n$ 个 z_k，$(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots\pm(n-1),-n)$

$$\operatorname*{Res}_{z=k+\frac{1}{2}}\operatorname{tg}\pi z=\left.\frac{\sin\pi z}{(\cos\pi z)'}\right|_{z=k+\frac{1}{2}}=-\frac{1}{\pi},$$

因此

$$\int_{|z|=n}\operatorname{tg}\pi z\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=-n}^{n-1}\operatorname*{Res}_{z=z_k}\operatorname{tg}\pi z$$

$$=2\pi\mathrm{i}\cdot 2n\left(-\frac{1}{\pi}\right)=-4n\mathrm{i}.$$

1.3 无穷远点的留数及其计算

定义1.2 设 $f(z)$在 $D:R<|z|<+\infty$内解析，对于 D 内任一正向圆周 c：$|z|=\rho>R$，规定 $f(z)$在∞**点的留数为**

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty}f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c^-}f(z)\mathrm{d}z,\tag{1.2}$$

（c^-表示顺时针方向，对 D 来说，可看作绕∞点的正向）.

若 $f(z)$在 $R<|z|<\infty$内的罗朗展式为 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_nz^n$，显然

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty}f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c^-}f(z)\mathrm{d}z=\frac{-1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c}f(z)\mathrm{d}z=-c_{-1}.$$

由(1.2)式,如果令 $z=\frac{1}{\zeta}$, $c: z=\rho e^{i\theta}, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$, 则 $\zeta=r_1 e^{i\varphi}=\frac{1}{\rho}e^{-i\theta}$,于是 $r_1=\frac{1}{\rho}$, $\varphi=-\theta$,因此当 z 沿着 c^- 走一圈时,ζ 将沿着 Γ: $\zeta=r_1 e^{i\varphi}$走一圈(逆时针方向),而函数 $f(z)=f\left(\frac{1}{\zeta}\right)=\varphi(\zeta)$在$0<|\zeta|<\frac{1}{R}$内解析,因此 $\zeta=0$是 $f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ 的孤立奇点,由(1.2)式得

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c^-} f(z)dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f\left(\frac{1}{\zeta}\right)\left(-\frac{1}{\zeta^2}\right)d\zeta$$

$$=-\operatorname*{Res}_{\zeta=0}\left[f\left(\frac{1}{\zeta}\right)\cdot\frac{1}{\zeta^2}\right].$$

由此我们得到

定理1.3 $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)=-\operatorname*{Res}_{z=0}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2}\right]$.

1.4 扩充复平面上的留数定理

定理1.4 若 $f(z)$在扩充复平面上只有有限多个孤立奇点 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \infty$,则

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)+\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z)=0.$$

证 取充分大的 R,使 $a_1, a_2\cdots a_n$ 全含于圆 $|z|=R$ 内部,于是函数 $f(z)$在 $R<|z|<\infty$内解析,作圆周 c: $|z|=R'>R$,因此有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c f(z)dz=-\frac{1}{2\pi i}\int_{c^-} f(z)dz,$$

而由定理1.1和定义1.2得

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c f(z)dz=\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z),$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c^-} f(z)dz=\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z),$$

故
$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)+\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z)=0.$$

本定理在计算闭路积分时很有用处

例1 计算$\int_{|z|=2}\frac{dz}{1+z^4}$.

解 函数$\frac{1}{1+z^4}$有一级极点$z_k=e^{i\frac{2k\pi+\pi}{4}}$($k=0,1,2,3$)全含于$|z|=2$内,另一孤立奇点$\infty$,由定理1.4

$$\int_{|z|=2}\frac{dz}{1+z^4}=-2\pi i\operatorname*{Res}_{z=\infty}\frac{1}{1+z^4}$$

$$=-2\pi i\left[-\operatorname*{Res}_{z=0}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{z^4}}\frac{1}{z^2}\right)\right]$$

$$=2\pi i\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{z^2}{1+z^4}=0.$$

例2 求积分$\int_{|z|=3}\frac{z^9}{(z^2+2)^3(z^2+1)^2}dz$.

解 函数$\frac{z^9}{(z^2+2)^3(z^2+1)^2}$的孤立奇点为$\pm\sqrt{2}i$(三级极点),$\pm i$(二级极点)和$\infty$点,前面10个孤立奇点全在圆$|z|=3$内,由定理1.4得

$$\int_{|z|=3}\frac{z^9}{(z^2+2)^3(z^2+1)^2}dz=-2\pi i\operatorname*{Res}_{z=\infty}\frac{z^9}{(z^2+2)^3(z^2+1)^2}$$

$$=2\pi i\operatorname*{Res}_{z=0}\left[\frac{\frac{1}{z^9}}{\left(\frac{1}{z^2}+2\right)^3\left(\frac{1}{z^3}+1\right)^2}\cdot\frac{1}{z^2}\right]$$

$$=2\pi i\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{1}{z(1+2z^2)^3(1+z^2)^2}$$

$$=2\pi i\left.\frac{1}{(1+2z^2)^3(1+z^2)^2}\right|_{z=0}=2\pi i.$$

例3 计算积分$\int_c\frac{z^3}{1+z}e^{\frac{1}{z}}dz$,$c$为正向圆周$|z|=2$.

解 $f(z)=\frac{z^3}{1+z}e^{\frac{1}{z}}$的孤立奇点为$z=0,-1,\infty$,前两个在$|z|=2$内,由定理1.4知

$$\int_c \frac{z^3}{1+z}e^{\frac{1}{z}}dz = -2\pi i \operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\frac{z^3}{1+z}e^{\frac{1}{z}}\right) = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0}\left(\frac{e^z}{1+z}\cdot\frac{1}{z^4}\right).$$

在$0<|z|<1$内

$$\frac{e^z}{1+z}\cdot\frac{1}{z^4} = \frac{1}{z^4}(1-z+z^2-z^3+\cdots)$$

$$\left(1+z+\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{3!}z^3+\cdots\right)$$

$$c_{-1} = \frac{1}{3!}-\frac{1}{2!}+1-1 = -\frac{1}{3},$$

故

$$\int_c \frac{z^3}{1+z}e^{\frac{1}{z}}dz = -\frac{2\pi i}{3}.$$

§2 留数理论在定积分计算上的应用

留数理论的重要应用之一是计算某些定积分和广义积分，这些积分在实函数理论中计算是相当麻烦的，而在复函数积分中只要选取适当的积分闭路，应用留数定理就能较容易地计算它们. 我们这里仅考虑几种特殊类型的积分，先应用解析函数计算形如 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)d\theta$、$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx$ 和 $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{imx}dx\ (m>0)$ 的积分，其中 $R(x)$. 或 $R(\cos\theta,\sin\theta)$ 分别表示 x 或 $\cos\theta,\sin\theta$ 的有理函数，然后应用多值函数来计算某些积分.

2.1 有理函数的积分 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}dx$.

首先我们易证得下列两个引理：

引理 1 设 $f(z)$ 沿弧 S_R：$z=Re^{i\theta}$，$(\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$，$R$ 充分大）上连续，且 $\lim\limits_{\substack{R\to\infty \\ z\in S_R}} zf(z)=\lambda$，则

$$\lim_{R\to\infty}\int_{S_R} f(z)dz = i(\theta_2-\theta_1)\lambda.$$

引理2 设$f(z)$沿圆弧S_r: $z-a=re^{i\theta}$,($\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2$,$r$充分小)上连续,且$\lim\limits_{r\to 0}(z-a)f(z)=\lambda$在$S_r$上一致成立,则有

$$\lim_{r\to 0}\int_{S_r}f(z)\mathrm{d}z=\mathrm{i}(\theta_2-\theta_1)\lambda.$$

证明留作习题.

定理2.1 设$f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}=\dfrac{c_0z^p+c_1z^{p-1}+\cdots+c_p}{b_0z^q+b_1z^{q-1}+\cdots+b_q}$,($c_0$, b_0均不等于0)其中$p(z)$,$Q(z)$是互质多项式,满足条件(1) $q-p\geqslant 2$,(2)在实轴上$Q(z)\neq 0$,则$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\sum_k\operatorname*{Res}_{z=a_k}f(z)$($a_k$是$f(z)$在上半$z$平面上的极点).

证 取闭路$\Gamma_R=c_R+AB$如图2.1所示,其中C_R: $|z|=R$, AB: $-R\leqslant x\leqslant R, y=0$, R充分大,使$f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$在上半平面内的极点a_k,($k=1,2,\cdots$)全含于Γ_R内部.

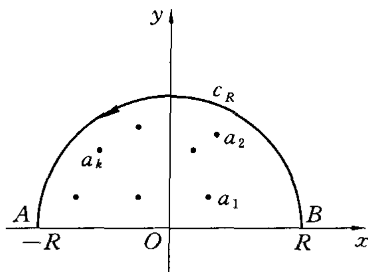


图 2.1

由于$f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$中分子次数至少比分母次数低两次,在实函数广义积分敛散理论中知道积分$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$存在,且

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x.$$

因为$\lim\limits_{\substack{R\to+\infty\\ z\in C_R}}zf(z)=0$. 由引理可知$\lim\limits_{R\to+\infty}\displaystyle\int_{C_R}f(z)\mathrm{d}z=0$,据留数基本定理有

$$\int_{\Gamma_R}f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_k\operatorname*{Res}_{z=a_k}f(z).$$

而上式左边

$$\int_{\Gamma_R}f(z)\mathrm{d}z=\int_{C_R}f(z)\mathrm{d}z+\int_{-R}^{R}f(x)\mathrm{d}x,$$

令 $R\to\infty$得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_k \operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z).$$

例1 计算 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^2+x^4}\mathrm{d}x.$

解 积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^2+x^4}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^2+x^4}\mathrm{d}x,$$

令

$$f(z) = \frac{z^2}{1+z^2+z^4} = \frac{z^2(z^2-1)}{z^6-1},$$

令 $z^6=1$得

$$z_k = \sqrt[6]{1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{6}}, \ (k=0,1,2,3,4,5).$$

函数 $f(z)=\dfrac{z^2}{1+z^2+z^4}$在上半平面的极点是

$$z_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}+\mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2},\ z_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2}+\mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

它们都是一级极点，而$\lim\limits_{z\to\infty} zf(z)=0$，由定理2.1得

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\cdot 2\pi\mathrm{i}\left[\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=z_2} f(z)\right] \\
&= \pi\mathrm{i}\left[\left.\frac{z^2}{2z+4z^3}\right|_{z=z_1} + \left.\frac{z^2}{2z+4z^3}\right|_{z=z_2}\right] \\
&= \pi\mathrm{i}\left[\frac{z_1}{2+4z_1^2} + \frac{z_2}{2+4z_2^2}\right] \\
&= \pi\mathrm{i}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{2+4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2}{3}\pi}} + \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}}{2+4\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}}\right] \\
&= \pi\mathrm{i}\left[\frac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}}{2\sqrt{3}\,\mathrm{i}} + \frac{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}}{-2\sqrt{3}\,\mathrm{i}}\right]
\end{aligned}$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

例2 计算 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n}$ （自然数 $n\geqslant 1$）.

解 令 $f(z)=\frac{1}{(z^2+1)^n}$，它满足定理2.1的条件，$f(z)$在上半平面的孤立奇点是 $z=\mathrm{i}$（n 级极点）.

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{z=\mathrm{i}}f(z)&=\frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{1}{(z+\mathrm{i})^n}\right]^{(n-1)}_{z=\mathrm{i}}\\&=\frac{1}{(n-1)!}\left.\frac{(-1)^{n-1}n(n+1)\cdots(n+n-2)}{(z+\mathrm{i})^{n+n-1}}\right|_{z=\mathrm{i}}\\&=\frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{[(n-1)!]^2(2\mathrm{i})^{2n-1}}=\frac{(2n-2)!}{[(n-1)!]^2 2^{2n-1}\cdot\mathrm{i}},\end{aligned}$$

所以 $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n}=2\pi\mathrm{i}\operatorname*{Res}_{z=\mathrm{i}}f(z)=\frac{\pi}{2^{2n-2}}\cdot\frac{(2n-2)!}{[(n-1)!]^2}.$$

2.2 形如 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}e^{imx}dx$ 的积分 （$m>0$）

引理3 （约当引理） 设 C_R：$|z|=R>0$，$0\leqslant\arg z=\theta\leqslant\pi$，如果(1) $f(z)$是 C_R 上的连续函数（R 充分大）.(2) 在 C_R 上 $|f(z)|\leqslant M_R$（与 θ 无关），其中 $M_R\to 0$，当 $R\to+\infty$时，则当 $m>0$时，有

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R}f(z)e^{imz}\mathrm{d}z=0.$$

证明留作习题.

定理2.2 设 $P(x)$，$Q(x)$分别是 p，q 次的互质多项式，且 $q\geqslant p+1$，$Q(x)$在实轴上无零点则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}e^{imx}\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\sum_k\operatorname*{Res}_{z=a_k}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}e^{imz}\right),\ (m>0),$$

其中 a_k 是$\frac{P(z)}{Q(z)}$在上半平面内的极点.

证 取围线 $\Gamma_R=C_R+AB$（与定理2.1中相同），R 充分大，

使函数$\dfrac{P(z)}{Q(z)}$在上半平面的极点全含在 Γ_k 内部，$\left(\dfrac{P(z)}{Q(z)}e^{imz}\right.$的孤立奇点就是$\left.\dfrac{P(z)}{Q(z)}\text{的极点}\right)$. 令 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$，则其满足约当引理的条件(1),(2)，又 $m>0$,因此

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)e^{imz}dz = 0.$$

当 R 充分大时

$$\int_{C_R}\frac{P(z)}{Q(z)}e^{imz}dz + \int_{-R}^{R}\frac{P(x)}{Q(x)}e^{imx}dx = \int_{\Gamma_R}\frac{P(z)}{Q(z)}e^{imz}dz$$

$$=2\pi i\sum_k \operatorname*{Res}_{z=a_k}\frac{P(z)}{Q(z)}e^{imz}.\left(a_k\text{ 是}\frac{P(z)}{Q(z)}\text{ 在 }\mathrm{Im}z>0\text{ 内的极点}\right)$$

令 $R\to+\infty$，得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}e^{imx}dx = 2\pi i\sum_k \operatorname*{Res}_{z=a_k}\frac{P(z)}{Q(z)}e^{imz}.$$

例3 计算积分 $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2x}{1+x^2}dx.$

解 令 $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$，考虑积分 $I_1=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i2x}}{1+x^2}dx$，因为 $m=2>0$，$f(z)$ 满足定理 2.2 的条件，从而有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i2x}}{1+x^2}dx = 2\pi i\operatorname*{Res}_{z=i}\frac{e^{i2z}}{1+z^2}$$

$$=2\pi i\cdot\left.\frac{e^{i2z}}{2z}\right|_{z=i} = \pi e^{-2},$$

所以

$$I=\mathrm{Re}I_1=\pi e^{-2}.$$

同时又得

$$\mathrm{Im}I_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin 2x}{1+x^2}dx = 0.$$

例4 计算积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$.

解

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x}dx,$$

由于函数$\frac{e^{iz}}{z}$的极点 $z=0$在实轴上，不符合定理2.2的条件，如果取图2.2的闭路，问题就能解决（留给读者自己完成），下面我们仅在选取被积函数时稍有变动，而所取闭路仍与图2.1相同. 因为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}-1}{x}\mathrm{d}x\right),$$

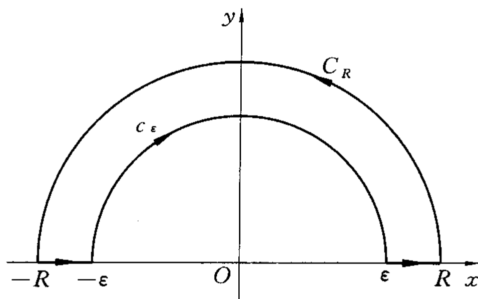


图 2.2

令 $f(z)=\frac{e^{iz}-1}{z}$，$z=0$为可去奇点，定义

$$f(z)=\begin{cases}\frac{e^{iz}-1}{z}, & z\neq 0\\ i\ , & z=0\end{cases}$$

则$\int_{\Gamma_R}f(z)\mathrm{d}z=0$，其中 Γ_R：$c_R+[-R,R]$为图 2.1 中闭路. 而

$$\int_{\Gamma_R}f(z)\mathrm{d}z=\int_{C_R}\frac{e^{iz}-1}{z}\mathrm{d}z+\int_{-R}^{R}\frac{e^{ix}-1}{x}\mathrm{d}x=0,$$

由约当引理

$$\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z\to 0,\ 当 R\to+\infty 时,$$

又知积分

$$\int_{C_R}\frac{1}{z}\mathrm{d}z=\pi i,$$

因此

$$\int_{-R}^{R}\frac{e^{ix}-1}{x}dx=\int_{C_R}\frac{1}{z}dz-\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z}dz$$

$$=\pi i-\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z}dz,\quad 令 R\to+\infty$$

得 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}-1}{x}dx=\pi i$,

于是 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\pi$, 即$\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$.

2.3 积分$\int_0^{2\pi}R(\cos\theta,\sin\theta)d\theta$的计算

$R(\cos\theta,\sin\theta)$是$\cos\theta,\sin\theta$的有理函数,这种积分可以化为单位圆周上的复积分,令$z=e^{i\theta}\quad 0\leqslant\theta\leqslant2\pi$,则

$$\cos\theta=\frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),$$

$$\sin\theta=\frac{1}{2i}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right),$$

$$d\theta=\frac{1}{ie^{i\theta}}dz=\frac{1}{iz}dz.$$

于是

$$\int_0^{2\pi}R(\cos\theta,\sin\theta)d\theta=\int_{|z|=1}R\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2},\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}\right)\cdot\frac{dz}{iz},$$

被积函数$f(z)=\frac{1}{iz}R\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2},\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}\right)$是$z$的有理函数,若$f(z)$在$|z|<1$内的极点是$a_1,a_2,\cdots,a_n$,则

$$\int_0^{2\pi}R(\cos\theta,\sin\theta)d\theta=\int_{|z|=1}\frac{1}{iz}R\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2},\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}\right)dz$$

$$=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=a_k}\left[\frac{1}{iz}R\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2},\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}\right)\right].$$

例5 计算积分 $I=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{a+\cos\theta}$. $a>1$

解 令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,则

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{a+\cos\theta}=\int_{|z|=1}\frac{1}{\mathrm{i}z}\frac{1}{a+\frac{z+\frac{1}{z}}{2}}\mathrm{d}z$$

$$=\frac{2}{\mathrm{i}}\int_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{z^2+2az+1}.$$

函数$\frac{1}{z^2+2az+1}$的两个极点是 $a_1=-a+\sqrt{a^2-1}$，$a_2=-a-\sqrt{a^2-1}$，由 $a>1$知 a_1在圆$|z|<1$内,a_2在$|z|\leqslant 1$外,因此

$$I=\frac{2}{\mathrm{i}}\cdot 2\pi\mathrm{i}\operatorname*{Res}_{z=a_1}\frac{1}{z^2+2az+1}$$

$$=4\pi\cdot\frac{1}{2z+2a}\bigg|_{z=a_1}=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

例6 计算积分 $I=\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{5+3\cos\theta}\mathrm{d}\theta.$

解 令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$， 则 $I=\frac{\mathrm{i}}{2}\int_{|z|=1}\frac{(z^2-1)^2}{z^2(3z+1)(z+3)}\mathrm{d}z.$

函数 $f(z)=\frac{(z^2-1)^2}{z^2(3z+1)(z+3)}$的极点为 $a_1=0$(二级),$a_2=-\frac{1}{3}$(一级)，$a_3=-3$(一级),而 a_1,a_2在圆$|z|<1$内

$$\operatorname*{Res}_{z=0}f(z)=\left[\frac{(z^2-1)^2}{(3z+1)(z+3)}\right]'_{z=0}=-\frac{10}{9},$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-\frac{1}{3}}f(z)=\lim_{z\to-\frac{1}{3}}\left(z+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{(z^2-1)^2}{z^2(3z+1)(z+3)}=\frac{8}{9},$$

于是 $$I=\frac{\mathrm{i}}{2}\cdot 2\pi\mathrm{i}\left[\operatorname*{Res}_{z=0}f(z)+\operatorname*{Res}_{z=-\frac{1}{3}}f(z)\right]$$

$$=-\pi\left(-\frac{10}{9}+\frac{8}{9}\right)=\frac{2\pi}{9}.$$

2.4 关于多值函数的积分

当被积函数是多值函数时，我们要适当割开 z 平面，使其分出单值解析分支，才能应用柯西定理及留数定理，取不同的分支，其积分值亦不相同，在这里我们仅举出一些例子.

例7 计算积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x^{1-\alpha}}{1+x^2}\mathrm{d}x.\quad (0<\alpha<2)$

将 z 平面沿正实轴割开，取多值函数 $z^{1-\alpha}$ 的单值分支，使当 z 在正实轴上边沿时取值为 $x^{1-\alpha}$，当 z 在正实轴下边沿时取值为 $x^{1-\alpha}\mathrm{e}^{2(1-\alpha)\pi\mathrm{i}}$，这个单值分支仍记作 $z^{1-\alpha}$，考虑函数 $\frac{z^{1-\alpha}}{1+z^2}$ 在图2.3中围道上的积分，我们有

$$\int_\varepsilon^R\frac{x^{1-\alpha}}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int_{\Gamma_R}\frac{z^{1-\alpha}}{1+z^2}\mathrm{d}z$$
$$+\int_R^\varepsilon\frac{x^{1-\alpha}\mathrm{e}^{2(1-\alpha)\pi\mathrm{i}}}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{z^{1-\alpha}}{1+z^2}\mathrm{d}z$$
$$=2\pi\mathrm{i}\left[\operatorname*{Res}_{z=\mathrm{i}}\left(\frac{z^{1-\alpha}}{1+z^2}\right)+\operatorname*{Res}_{z=-\mathrm{i}}\left(\frac{z^{1-\alpha}}{1+z^2}\right)\right],$$

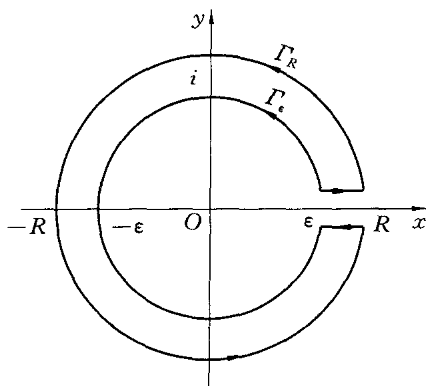


图 2.3

由于 $\alpha>0$，故当 $R\to+\infty$时

$$\left|\int_{\Gamma_R}\frac{z^{1-\alpha}}{1+z^2}\mathrm{d}z\right|\leqslant\frac{R^{1-\alpha}2\pi R}{R^2-1}\to 0,$$

又因 $\alpha<2$，故当 $\varepsilon\to 0$时

$$\left|\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{z^{1-\alpha}}{1+z^2}\mathrm{d}z\right|\leqslant\frac{\varepsilon^{1-\alpha}\cdot 2\pi\varepsilon}{1-\varepsilon^2}\to 0,$$

而 $$\operatorname*{Res}_{z=\mathrm{i}}\left(\frac{z^{1-\alpha}}{1+z^2}\right)=\left.\frac{z^{1-\alpha}}{z+\mathrm{i}}\right|_{z=\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}(1-\alpha)\mathrm{i}}}{2\mathrm{i}},$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-\mathrm{i}}\left(\frac{z^{1-\alpha}}{1+z^2}\right)=\left.\frac{z^{1-\alpha}}{z-\mathrm{i}}\right|_{z=-\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{2}(1-\alpha)\mathrm{i}}}{-2\mathrm{i}},$$

故 $$\lim_{\substack{R\to+\infty\\ \varepsilon\to 0}}\int_\varepsilon^R\frac{x^{1-\alpha}}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi\left[\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}(1-\alpha)\mathrm{i}}-\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{2}(1-\alpha)\mathrm{i}}\right]}{1-\mathrm{e}^{2(1-\alpha)\pi\mathrm{i}}}=\frac{\mathrm{i}\pi\left[\mathrm{e}^{-\frac{\alpha\pi}{2}\mathrm{i}}+\mathrm{e}^{-\frac{3\alpha\pi}{2}\mathrm{i}}\right]}{1-\mathrm{e}^{-2\alpha\pi\mathrm{i}}}$$

$$=\frac{\mathrm{i}\pi\left[\mathrm{e}^{\frac{\alpha\pi}{2}\mathrm{i}}+\mathrm{e}^{-\frac{\alpha\pi}{2}\mathrm{i}}\right]}{\mathrm{e}^{\alpha\pi\mathrm{i}}-\mathrm{e}^{-\alpha\pi\mathrm{i}}}=\frac{\pi}{2\sin\frac{\alpha\pi}{2}}.$$

即 $$\int_0^{+\infty}\frac{x^{1-\alpha}}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2\sin\frac{\alpha\pi}{2}}.\quad(0<\alpha<2)$$

例8 计算积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$.

考虑函数 $\frac{\ln z}{(1+z^2)^2}$ 在图2.4中围道 C 上的积分，C 由二个半圆

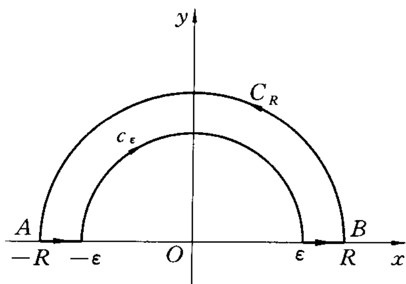


图 2.4

周 C_R,C_ε 以及 ox 轴上两线段组成. 在 C 内部仅有一个二级极点 $z=\mathrm{i}$,而其支点 $z=0$及 $z=\infty$已不属于 C 的内部,故 $f(z)$在 C 所围的有界闭域上,除 $z=\mathrm{i}$ 外是单值解析的. 令 $\psi(z)=(z-\mathrm{i})^2\dfrac{\ln z}{(z^2+1)^2}=\dfrac{\ln z}{(z+\mathrm{i})^2}$.

$$\psi'(z)=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{(z+\mathrm{i})^2}-\frac{2}{(z+\mathrm{i})^3}\ln z,$$

则

$$\operatorname*{Res}_{z=\mathrm{i}}\left(\frac{\ln z}{(1+z^2)^2}\right)=\psi'(\mathrm{i})=\frac{\pi+2\mathrm{i}}{8}.$$

由于

$$\lim_{|z|\to+\infty}z\frac{\ln z}{(1+z^2)^2}=0,$$

由引理1知

$$\int_{C_R}\frac{\ln z}{(1+z^2)^2}\mathrm{d}z\to 0,\quad(\text{当 } R\to+\infty)$$

又因 $\lim\limits_{|z|\to 0}z\dfrac{\ln z}{(1+z^2)^2}=0$, 由引理2知

$$\int_{C_\varepsilon}\frac{\ln z}{(1+z^2)^2}\mathrm{d}z\to 0,(\text{当 } \varepsilon\to 0)$$

在线段 εR 上,$z=x\mathrm{e}^{\mathrm{i}o}(x>0)$

$$\lim_{\substack{R\to+\infty\\ \varepsilon\to 0}}\int_\varepsilon^R\frac{\ln z}{(1+z^2)^2}\mathrm{d}z=\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x.$$

在线段$(-R)(-\varepsilon)$上,$z=x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}(x>0)$

$$\ln z=\ln x+\pi\mathrm{i},\quad \mathrm{d}z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\mathrm{d}x=-\mathrm{d}x,$$

$$\lim_{\substack{R\to+\infty\\ \varepsilon\to 0}}\int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{\ln z}{(1+z^2)^2}\mathrm{d}z=-\int_{+\infty}^0\frac{\ln x+\pi\mathrm{i}}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{\ln x+\pi\mathrm{i}}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x.$$

于是,当 $R\to+\infty$,$\varepsilon\to 0$时,由留数定理得

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x+\int_0^{+\infty}\frac{\ln x+\pi \mathrm{i}}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{\pi+2\mathrm{i}}{8}$$

$$=-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi^2}{4}\mathrm{i},$$

比较两端的实部，得

$$2\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2},$$

故

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{4}.$$

例9 计算积分 $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{(x-2)\sqrt{1-x^2}}$.

考虑多值函数

$$f(z)=(z-2)\sqrt{1-z^2}$$

在 z 平面上取线段 $[-1,1]$ 作为割线，得一区域，在此区域内可以把 $f(z)$ 分成解析分支，取在割线上边沿 $\sqrt{1-x^2}$ 为正值的那支，可规定 $\arg(1-x)=0$，$\arg(1+x)=0$，取积分围线如图 2.5所示，当 z 从上边沿沿 $\Gamma_{\varepsilon'}$ 按顺时针方向转到下边沿时，$\arg(1-z)$ 减少 2π，$\arg(1+z)$ 不变，因此 $f(z)$ 的幅角增加 $-\pi$，故在割线的下边沿.

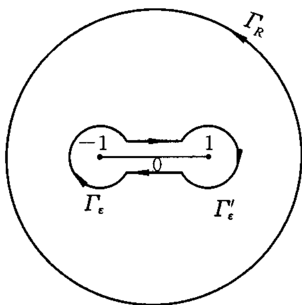


图 2.5

$$f(z)=(x-2)\sqrt{1-x^2}\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}}=-(x-2)\sqrt{1-x^2},$$

$$\operatorname*{Res}_{z=2}\frac{1}{f(z)}=\lim_{z\to 2}\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}}=\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}},$$

由留数定理得

$$\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}\frac{\mathrm{d}x}{(x-2)\sqrt{1-x^2}}+\int_{1-\varepsilon}^{-1+\varepsilon}\frac{\mathrm{d}x}{-(x-2)\sqrt{1-x^2}}$$

$$+\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{\mathrm{d}z}{f(z)}+\int_{\Gamma_\varepsilon'}\frac{\mathrm{d}z}{f(z)}+\int_{\Gamma_R}\frac{\mathrm{d}z}{f(z)}$$

$$=2\pi\mathrm{i}\operatorname*{Res}_{z=2}\left[\frac{1}{f(z)}\right]=\frac{-2\pi}{\sqrt{3}}.$$

由引理1与引理2知，当 $R\to+\infty,\varepsilon\to0$时有

$$\int_{\Gamma_R}\frac{\mathrm{d}z}{f(z)}\to0,\quad\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{\mathrm{d}z}{f(z)}\to0,\quad\int_{\Gamma_\varepsilon'}\frac{\mathrm{d}z}{f(z)}\to0,$$

而 $$\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}\frac{\mathrm{d}x}{(x-2)\sqrt{1-x^2}}+\int_{1-\varepsilon}^{-1+\varepsilon}\frac{\mathrm{d}x}{-(x-2)\sqrt{1-x^2}}$$

$$=2\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}\frac{\mathrm{d}x}{(x-2)\sqrt{1-x^2}},$$

令 $\varepsilon\to0$得

$$2\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{(x-2)\sqrt{1-x^2}}=\frac{-2\pi}{\sqrt{3}},$$

所以

$$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{(x-2)\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

§3 幅角原理及其应用

留数理论的又一重要应用是计算积分

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z,$$

有时称这积分为 $f(z)$关于曲线 C 的**对数留数**. 我们可由它推出**幅角原理**、应用幅角原理来研究多项式在某个区域内的零点的个数.

引理1 若 a 是解析函数 $f(z)$的 n 级零点，则 a 必是$\dfrac{f'(z)}{f(z)}$的一级极点，且$\operatorname*{Res}\limits_{z=a}\dfrac{f'(z)}{f(z)}=n$.

证 由引理条件可知在 a 点某邻域内有 $f(z)=(z-a)^n\varphi(z)$，其中 $\varphi(z)$在 a 点解析，且$\varphi(a)\neq0$，而$\dfrac{f'(z)}{f(z)}=\dfrac{n}{z-a}+\dfrac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$.

显然 $\dfrac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ 在 a 点解析，因此 a 为 $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ 的一级极点，并有 $\operatorname*{Res}\limits_{z=a}\dfrac{f'(z)}{f(z)}=n.$

引理2 若 b 是解析函数 $f(z)$ 的 p 级极点，则 b 必是 $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ 的一级极点，且 $\operatorname*{Res}\limits_{z=b}\dfrac{f'(z)}{f(z)}=-p.$

证 由极点的性质，可知在 b 点的某个去心邻域内有

$$f(z)=\frac{\psi(z)}{(z-b)^p},$$

其中 $\psi(z)$ 在 b 点解析，且 $\psi(b)\neq 0$，

而
$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{-p}{z-b}+\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}$$

显然 $\dfrac{\psi'(z)}{\psi(z)}$ 在 b 点解析，b 是 $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ 的一级极点，并有 $\operatorname*{Res}\limits_{z=b}\dfrac{f'(z)}{f(z)}=-p.$

定理3.1 设 $f(z)$ 是区域 D 内的亚纯函数，$a_1,a_2,\cdots,a_l$；$b_1,b_2,\cdots,b_m$ 分别是 $f(z)$ 在 D 内的零点和极点，它们的级别分别是 $n_1,n_2,\cdots,n_l$；$p_1,p_2,\cdots,p_m$，C 是 D 内任一条包围 $f(z)$ 在 D 内所有零点和极点的正向简单闭曲线，则有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f'(z)}{f(z)}dz=N(f,c)-p(f,c),$$

其中 $N(f,c)$ 为 $f(z)$ 在 C 内的零点个数，$p(f,c)$ 是 $f(z)$ 在 c 内的极点个数（k 级算 k 个）.

证 由留数定理和引理1，引理2得

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum_{k=l}^{l}\operatorname*{Res}_{z=a_k}\frac{f'(z)}{f(z)}+\sum_{j=1}^{m}\operatorname*{Res}_{z=b_j}\frac{f'(z)}{f(z)}$$

$$=\sum_{k=1}^{l}n_k-\sum_{j=1}^{m}p_j=N(f,c)-p(f,c).$$

推论1 若函数 $f(z)$ 在正向闭曲线 C 上及 C 内解析，则 $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C\frac{f'(z)}{f(z)}dz=N(f,c).$

定理3.2 （幅角原理） 若 $f(z)$ 在闭曲线 c 上解析，且是 c 内的亚纯函数，在 c 上无零点，则

$$N(f,c)-p(f,c)=\frac{1}{2\pi}\Delta_c \operatorname{Arg} f(z),$$

其中 $\Delta_c \operatorname{Arg} f(z)$ 表示 z 沿 c 正向绕行一周时，幅角 $\operatorname{Arg} f(z)$ 的改变量.

证 令 $w=f(z)$，在这映射下，c 的象是 Γ，由于在 c 上 $f(z)\neq 0$，因此曲线 Γ 不经过原点 $w=0$. 如图3.1.

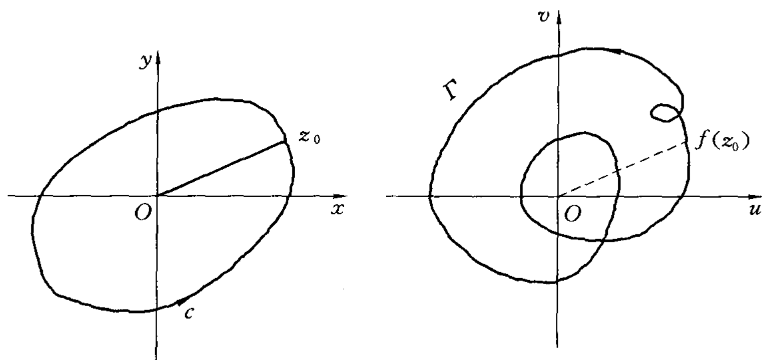


图 3.1

而 $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dw}{w}=\frac{1}{2\pi i}[(\operatorname{Ln} w)_{w\in\Gamma}$ 的改变量].

当 z 从 z_0 出发沿 c 正向绕行一周，$w=f(z)$ 从 $w_0=f(z_0)$ 出发沿 Γ 绕行且回到 $w_0=f(z_0)$，而改变量

$$\Delta(\operatorname{Ln} w)|_{w\in\Gamma}=(\Delta\ln|w|+i\Delta\operatorname{Arg} w)_{w\in\Gamma},$$

其中 $(\Delta\ln|w|)_{w\in\Gamma}=0$，因此

$$N(f,c)-p(f,c)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz=\frac{1}{2\pi}\Delta\operatorname{Arg} w|_{w\in\Gamma}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\Delta_c \operatorname{Arg} f(z).$$

当象曲线 Γ 内部不含原点 $w=0$ 时，显然 $\Delta_c \operatorname{Arg} f(z)=0$.

例如 $f(z)=z^2$在圆$|z|<1$内有两个零点$z=0$（二级），无极点，由幅角原理知

$$N=\frac{1}{2\pi}\Delta_c \mathrm{Arg} z^2=\frac{1}{2\pi}\Delta_c(2\mathrm{Arg} z)=\frac{1}{2\pi}\cdot 4\pi=2.$$

定理3.3 （Rouche 定理）

设(1) 函数$f(z)$，$g(z)$都在闭曲线c上及c内解析，(2) 在c上$|f(z)|>|g(z)|$，则在c内函数$f(z)+g(z)$与$f(z)$有相同多的零点.

证 由定理条件得出在c上，$|f(z)|>|g(z)|\geqslant 0$和$|f(z)+g(z)|\geqslant|f(z)|-|g(z)|>0$，所以在$c$上无$f(z)$和$f(z)+g(z)$的零点.

因为f,g在c上和c内解析，由定理3.1和定理3.2得

$$N(f+g,c)=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f'+g'}{f+g}dz=\frac{1}{2\pi}\Delta_c \mathrm{Arg}(f+g)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\Delta_c \mathrm{Arg} f(z)+\frac{1}{2\pi}\Delta_c \mathrm{Arg}\left(1+\frac{g(z)}{f(z)}\right),$$

$$N(f,c)=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f'}{f}dz=\frac{1}{2\pi}\Delta_c \mathrm{Arg} f(z),$$

所以 $$N(f,c)-N(f+g,c)=\frac{1}{2\pi i}\int_c\left(\frac{f'}{f}-\frac{f'+g'}{f+g}\right)dz$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\Delta_c \mathrm{Arg}\left(1+\frac{g(z)}{f(z)}\right).$$

令$w=1+\dfrac{g(z)}{f(z)}$，则有$|w-1|=\left|\dfrac{g(z)}{f(z)}\right|<1\ (z\in c)$.

当z沿c正向绕行一周时，象曲线Γ（如图3.2）始终在圆$|w-1|<1$内，因此Γ内部不含原点$w=0$，则$\Delta_c \mathrm{Arg}\left(1+\dfrac{g(z)}{f(z)}\right)=0$，

故 $$N(f,c)-N(f+g,c)=0$$

即 $$N(f,c)=N(f+g,c).$$

定理3.4 若$f(z)$，$g(z)$都是c内的亚纯函数，且在c上解析以及$|g(z)|<|f(z)|$，则

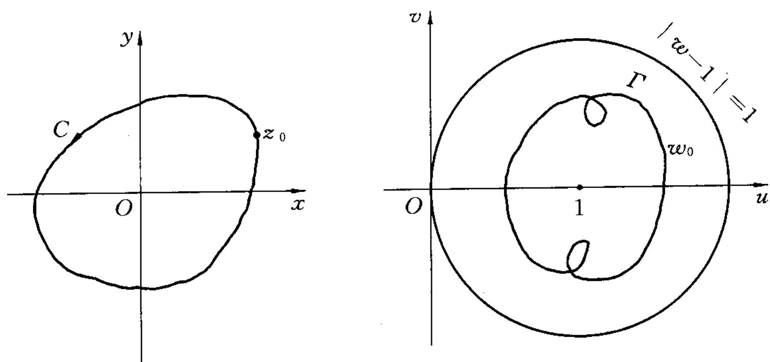


图 3.2

$$N(f+g,c)-p(f+g,c)=N(f,c)-p(f,c).$$

证 由定理的条件可推知在 c 上无 f 与 $f+g$ 的零点，由幅角原理

$$N(f+g,c)-p(f+g,c)=\frac{1}{2\pi}\Delta_c\mathrm{Arg}(f(z)+g(z)),$$

而 $\mathrm{Arg}(f+g)=\mathrm{Arg}f+\mathrm{Arg}(1+\frac{g}{f})$，

令 $1+\frac{g(z)}{f(z)}=w$，于是 $|w-1|=\left|\frac{g(z)}{f(z)}\right|<1$，

因此 $\Delta_c\mathrm{Arg}(1+\frac{g}{f})=0$.

故 $$N(f+g,c)-p(f+g,c)=\frac{1}{2\pi}\Delta_c\mathrm{Arg}f=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z.$$
$$=N(f,c)-p(f,c)$$

例 1 用路西(Rouche)定理证明代数基本定理：n 次多项式 $p(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n\quad(a_0\neq0)$有且仅有 n 个零点.

证 令 $f(z)=a_0z^n$，$g(z)=a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$

当 $|z|>\max\left(\frac{|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|}{|a_0|},1\right)$ 时

$$
\begin{aligned}
|g(z)| &\leqslant |a_1|\ |z|^{n-1} + |a_2|\ |z|^{n-2} + \cdots + |a_n| \\
&< (|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|)|z|^{n-1} \\
&< |a_0||z|^n = |f(z)|.
\end{aligned}
$$

所以当 R 充分大时，在 $|z|=R$ 上 $|g(z)|<|f(z)|$，$g(z)$，$f(z)$ 都是解析函数，满足路西定理条件，在圆 $|z|=R$ 内，$f(z)+g(z)=p(z)$ 与 $f(z)=a_0z^n$ 有相同多个零点，即有 n 个.

另一方面，因 $a_0\neq0$ 则 $\lim\limits_{|z|\to+\infty}|p(z)|=+\infty$，说明当 R 充分大时，在 $|z|=R$ 上，$|p(z)|>1$，因此在圆 $|z|=R$ 外，无 $p(z)$ 的零点，故 $p(z)$ 在 z 平面上有且仅有 n 个零点.

例2 证明方程 $2z^5+8z-1=0$ 在圆环 $1<|z|<2$ 内有四个根.

证 令 $f(z)=2z^5$，$g(z)=8z-1$

在 $|z|=2$ 上，$|f|=64$，$|g|\leqslant8|z|+1=17$，所以 $|f|>|g|$，由路西定理知 $f+g=2z^5+8z-1$ 与 $f=2z^5$ 在 $|z|<2$ 内有相同多个零点，因为 f 有五个，因此 $f+g$ 仅有五个零点全在 $|z|<2$ 内，另一方面，在 $|z|=1$ 上，$|f|=2$，$|g|\geqslant8|z|-1=7$，所以 $|g(z)|>|f(z)|$，显然在 $|z|=1$ 上无 $g(z)$ 及 $f(z)+g(z)$ 的零点，而 $g(z)$ 在 $|z|<1$ 内有一个零点，由路西定理知 $f(z)+g(z)=2z^5+8z-1$ 与 $g(z)=8z-1$ 在 $|z|<1$ 内有相同多的零点，因此 $2z^5+8z-1$ 在 $|z|<1$ 内只有一个零点，综合上面讨论，方程 $2z^5+8z-1=0$ 在圆环域 $1<|z|<2$ 内有四个根.

第六章　解析开拓

我们已经知道，如果两个解析函数在某一点的一个任意小的邻域内重合，或更一般地在某区域内无穷多个点列上相等，而点列的聚点在此区域内，则此两解析函数在此区域内完全相等. 这是一个和实变函数有着本质上区别的性质，在实变函数中，一个定义在区间$[a,b]$上的函数$f(x)$，我们可用无限多种方式将这函数的图形延长到区间以外去，而不破坏它的连续性. 对于解析函数来说，定义域的扩大，只要是可能的话，那么扩大将是唯一的，即它在某一区域内的值完全地唯一地确定了它在这个区域以外的值. 在这一章中，我们将研究解析函数的解析开拓的概念及方法，我们还要进一步引进黎曼曲面的概念，将多值函数看作黎曼曲面上的单值解析函数.

§1　解析开拓的概念与方法

定义1.1　设函数$f(z)$在区域D内解析，设区域G包含D，若存在函数$F(z)$，它在G内解析，且在D内$F(z)=f(z)$，则称函数$f(z)$可以解析开拓到G内，并称$F(z)$为$f(z)$在区域G内的**解析开拓**.

例1　e^z是e^x的解析开拓

$\sin z$是$\sin x$的解析开拓.

例2　设$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^n$，它在区域$D$：$|z|<1$内解析. 则它可以解析开拓到整个$z$平面除去$z=1$外的区域$G$上.

事实上，在 D 内，$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\frac{1}{1-z}$，则函数 $F(z)=\frac{1}{1-z}$，就在 G 内解析，且在 D 上有 $F(z)=f(z)$.

当然并不是对所有区域 D 内的解析函数都可以进行解析开拓，但是若存在解析开拓，则必是唯一的，因为若有两个函数 $F_1(z)$ 及 $F_2(z)$ 在 G 内解析：$D\subset G$，且在 D 内 $F_1(z)=f(z)$ 及 $F_2(z)=f(z)$，则由解析函数的唯一性定理知在 G 内必有 $F_1(z)=F_2(z)$.

下面我们介绍几种解析开拓方法

定理 1.1 设平面上的区域 D_1 与 D_2 有一个公共部分 d，如图 1.1 所示，函数 $f_1(z)$ 在 D_1 内解析，函数 $f_2(z)$ 在 D_2 内解析，且在 $d=D_1\cap D_2$ 上 $f_1(z)=f_2(z)$，则函数

$$F(z)=\begin{cases}f_1(z), & z\in D_1\backslash d\\ f_2(z), & z\in D_2\backslash d\\ f_1(z)=f_2(z), & z\in d\end{cases}$$

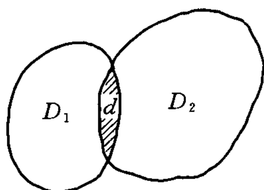


图 1.1

是区域 $D=D_1+D_2$ 上的单值解析函数.

证 由于三个集合 $D_1\backslash d$，$D_2\backslash d$ 及 d 互不相交，因此 $F(z)$ 为 $D_1+D_2=(D_1\backslash d)+(D_2\backslash d)+d$ 上的单值函数. 另外，在 D_1 内，$F(z)=f_1(z)$，在 D_2 内，$F(z)=f_2(z)$，故在 D_1 及 D_2 内 $F(z)$ 解析，因而 $F(z)$ 在 D_1+D_2 内解析.

我们称函数 $F(z)$ 为 $f_1(z)$ 由 D_1 到 D 的解析开拓，或称 $F(z)$ 为 $f_2(z)$ 由 D_2 到 D 的解析开拓，或称 $f_1(z)$ 与 $f_2(z)$ **互为直接解析开拓**.

定理 1.2 设区域 D_1 与 D_2 不相交，但有一段公共边界 Γ，这是一条逐段光滑曲线，如图 1.2 所示. 设函数 $f_1(z)$ 在 D_1 内解析，在 $D_1+\Gamma$ 上连续，函数 $f_2(z)$ 在 D_2 内解析，在 D_2+

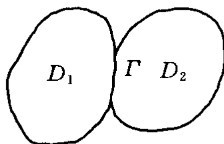


图 1.2

Γ 上连续，且当 $z \in \Gamma$ 时，有 $f_1(z)=f_2(z)$，则函数

$$F(z)=\begin{cases} f_1(z), & z \in D_1 \\ f_2(z), & z \in D_2 \\ f_1(z)=f_2(z), & z \in \Gamma \end{cases}$$

是区域 $D=D_1+D_2+\Gamma$ 上的单值解析函数.

证 显然三个集合 D_1, D_2 与 Γ 互不相交，函数 $F(z)$ 在区域 $D=D_1+D_2+\Gamma$ 上为单值函数.

由条件知，$F(z)$ 在 D_1, D_2 内解析，在区域 D 上连续，任作闭围线 $C \subset D$，若 $C \subset D_1$ 或 $C \subset D_2$，则由柯西定理知 $\int_c F(z)\mathrm{d}z=0$，若 C 有一部分在 D_1 内，记为 C_1，另一部分在 D_2 内，记为 C_2，Γ 落在 C 内部的一段记成 γ，如图 1.3 所示. 由于 $F(z)$ 分别在围路 $c_1+\gamma$ 及 $c_2+\gamma^-$ 内解析，在其上连续，由推广的柯西定理知

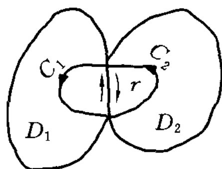


图 1.3

$$\int_c F(z)\mathrm{d}z=\int_{c_1+\gamma} F(z)\mathrm{d}z+\int_{c_2+\gamma-} F(z)\mathrm{d}z=0,$$

故由莫瑞拉定理知 $F(z)$ 在 D 内解析.

我们称函数 $f_1(z)$ 与 $f_2(z)$ 越过公共弧 Γ 互为直接解析开拓.

上面两条定理在原则上提供了两种解析开拓的方法. 下面先给出一般解析函数及完全解析函数等定义，然后再介绍两个具体开拓方法.

定义1.2 设函数 $f(z)$ 是区域 D 内的单值解析函数，则 $f(z)$ 与 D 的组合称为一个**解析元素**记成 (f,D).

定义1.3 设 $\{(f_1,D_1),(f_2,D_2),\cdots,(f_n,D_n)\}$ 为给定的解析元素集，其中 (f_k, D_k) 是 (f_{k-1}, D_{k-1}) $(k=2,3,\cdots,n)$ 的直接解析开拓，则称这些解析元素组成**解析开拓链**，且称 (f_1,D_1) 及 (f_n,D_n) **互为解析开拓**.

设已给一组解析元素，其中任意两解析元素互为解析开拓，则

称这组解析元素确定一个**一般解析函数** $F(z)$.

定义1.4 若一般解析函数 $F(z)$包含其中任一解析元素的一切解析开拓,则称这一解析函数 $F(z)$为**完全解析函数**,$F(z)$的定义域 G 称为它的存在区域. G 的边界称为 $F(z)$的**自然边界**,G 的边界点就是 $F(z)$的**奇点**.

定理1.3 (Riemann-Schwarz 对称原理)

(1) 设 D, D^* 分别在上下半 z 平面上关于 x 轴对称的两个区域,且它们的边界都包含 x 轴上一条线段 s.

(2) 设($f(z)$, D)为解析元素,$f(z)$在 $D+s$ 上连续,且当 $z\in s$ 时,$f(z)$为实数,则存在一个函数 $w=F(z)$在区域 $D+D^*+S$ 内解析,在 D 内 $F(z)=f(z)$, 在 D^* 内 $F(z)=\overline{f(\bar{z})}$.

证

$$令\ F(z)=\begin{cases} f(z), & 当\ z\in D+S \\ \overline{f(\bar{z})}. & 当\ z\in D^* \end{cases}$$

下面证明 $F(z)$满足定理要求,

(1)由假设条件在区域 D 内 $F(z)=f(z)$解析, $D+S$ 上连续.

(2) $\overline{f(\bar{z})}$在 D^* 内解析,事实上,设 $z,z_0\in D^*$ 则 $\bar{z}$, $\bar{z}_0\in D$,且

$$\lim_{z\to z_0}\frac{\overline{f(\bar{z})}-\overline{f(\bar{z}_0)}}{z-z_0}=\overline{\lim_{z\to z_0}\left[\frac{f(\bar{z})-f(\bar{z}_0)}{\bar{z}-\bar{z}_0}\right]}$$

$$=\overline{\lim_{\bar{z}\to \bar{z}_0}\left[\frac{f(\bar{z})-f(\bar{z}_0)}{\bar{z}-\bar{z}_0}\right]}=\overline{f'(\bar{z}_0)}.$$

(3) $\overline{f(\bar{z})}$在 D^*+s 上连续,事实上,若在 s 上任取一点 x_0,则

$$\lim_{\substack{z\to x_0\\ z\in D^*+s}}\overline{f(\bar{z})}=\overline{\lim_{\substack{\bar{z}\to x_0\\ \bar{z}\in D+s}}f(\bar{z})}=\overline{f(x_0)}=\overline{f(x_0)}.$$

(4) $z\in s$ 时,$\overline{f(\bar{z})}=f(z)$, 因此时

$$z=\bar{z},\quad \overline{f(\bar{z})}=\overline{f(z)}=f(z)$$

故由定理1.2知($\overline{f(\bar{z})}$, D^*)是($f(z)$,D)越过 s 的直接解析开拓,因而 $F(z)$在区域 $D+D^*+s$ 内解析.

上述定理还可以推广为 D 与 D^* 关于任一条直线对称的情形，如图1.4所示.

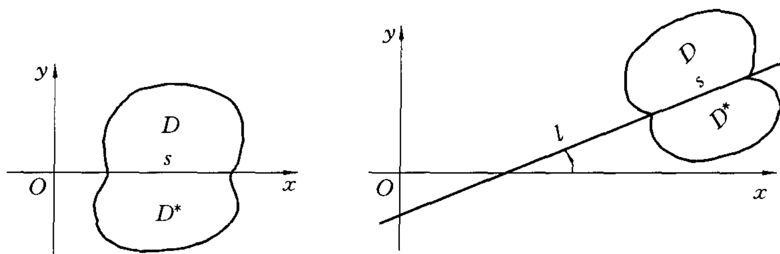


图 1.4

现在再介绍另一种具体开拓的方法，即**幂级数开拓法**.

设 $f_1(z)$ 在点 z_1 解析，则 $f_1(z)$ 可在 z_1 点的邻域内展开成幂级数：

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(1)} (z - z_1)^n. \tag{1}$$

若这个级数的收敛半径为无穷大，即在 z 平面上每一点处，级数(1)都收敛，这时级数(1)的和表示一个在整个平面上处处解析的函数.

若展开式(1)的收敛半径为有限的正数 r_1，设其收敛圆域为 D_1：$|z-z_1|<r_1$，在 D_1 内任取异开 z_1 的点 z_2，并在点 z_2 的邻域内把 $f_1(z)$ 展开为

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(2)} (z - z_2)^n, \tag{2}$$

其中 $$C_n^{(2)} = \frac{1}{n!} f_1^{(n)}(z_2).$$

设 D_2：$|z-z_2|<r_2$ 为上述级数(2)的收敛圆域，并将其和函数记为 $f_2(z)$，由于 z_2 与 D_1 的边界上任一点的距离，$d \geqslant r_1 - |z_1-z_2|$，于是在圆域 $|z-z_2|<r_1-|z_1-z_2|$ 内，$f_2(z)$ 解析，且 $f_1(z)=f_2(z)$，由此可见级数(2)的收敛半径 $r_2 \geqslant r_1 - |z_1-z_2|$（图1.5）

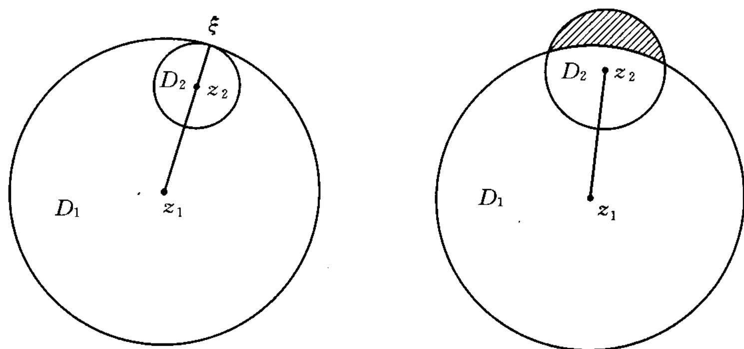


图 1.5

若 $r_2=r_1-|z_2-z_1|$,则级数(2)给出的在收敛圆内那些点的值已被级数(1)确定了.此时,级数(1)与(2)的收敛圆周的切点 ζ,就是 $f_1(z)$的一个奇点,即 $f_1(z)$不能从过 z_2的半径方向上开拓到 D_1外.

若 $r_2>r_1-|z_1-z_2|$,则级数(2)确定一个在 D_2内解析的函数 $f_2(z)$,且 D_2有一部分在 D_1外(如图1.5),由解析函数的唯一性,在 D_1及 D_2的公共部分,$f_1(z)=f_2(z)$,于是我们就有了$f_1(z)$沿过 z_2的半径方向解析开拓到 D_1外,新组成的区域还可以向一切方向进行解析开拓,一直继续到整个函数的自然边界为止,就得到一完全解析函数.

应该注意以下两点:

(1) 若级数(1)的和函数 $f_1(z)$在收敛圆的任一个方向都不能进行解析开拓,则收敛圆域 D_1就是 $f_1(z)$的定义域,而收敛圆周就是它的自然边界.

(2) 由于幂级数的收敛圆周上,至少存在一个和函数的奇点,所以在收敛圆内所定义的解析函数,不可能向任意方向都可进行解析开拓.

例1 函数$\frac{1}{1-z}$在原点可展成幂级数

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}z^n,$$

这个级数的收敛圆为$|z|<1$. 因此，它表示一个在单位圆内的解析函数$\frac{1}{1-z}$.

如在单位圆内取一点$a\neq 0$，$|a|<1$，则函数$\frac{1}{1-z}$在a的某一个邻域内可展成级数

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(1-a)^{n+1}}(z-a)^n.$$

当$a=-\frac{1}{2}$时，展开式成为$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\left(z+\frac{1}{2}\right)^n$. 此级数的收敛圆半径为$\frac{3}{2}$. 显然这个级数是$\sum_{n=0}^{\infty}z^n$的一个解析开拓，因为在圆$\left|z+\frac{1}{2}\right|<\frac{3}{2}$内确实含有单位圆以外的点(图1.6中斜线部分).

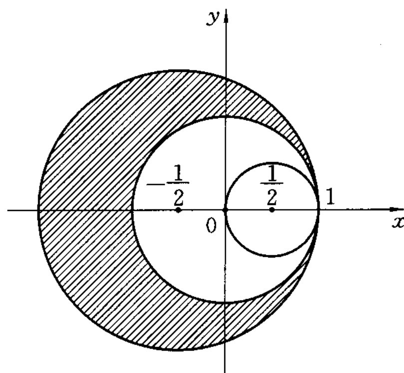


图 1.6

当$a=\frac{1}{2}$时，展开式成为$\sum_{n=0}^{+\infty}2^{n+1}\left(z-\frac{1}{2}\right)^n$，而它的收敛半径为$\frac{1}{2}$. 此时$z=1$为新旧两个收敛圆周的切点，所以是函数$\frac{1}{1-z}$的奇点.

事实上，除实轴正方向外，$\frac{1}{1-z}$可沿单位圆的任一方向进行开拓，因为 $z=1$为它的唯一奇点，显然，$\frac{1}{1-z}$就是 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 向单位圆外开拓而得到的完全解析函数，以 $z=1$为其自然边界.

例2 在单位圆$|z|<1$内的解析函数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$ 不能开拓到单位圆周$|z|=1$的外部，即$|z|=1$为其自然边界.

证 先证 $z=1$是 $f(z)$的一个奇点，为此，只须证在$|z|<1$内，当 $z\to 1$时，$f(z)$不趋于一个有限极限.

设$0<\rho<1$，则对任一自然数 N，

$$f(\rho)=\sum_{n=0}^{+\infty} \rho^{2^n} \geqslant \sum_{n=0}^{N} \rho^{2^n} \geqslant (N+1)\rho^{2^N},$$

在上式中，令 $\rho\to 1-0$，就有 $f(\rho)\geqslant N+1>N$，亦即可找到 $\rho_0(0<\rho_0<1)$，使得当 $\rho_0<\rho<1$时，$f(\rho)>N$，因 N 是任意的，所以 $\lim\limits_{\rho\to 1-0} f(\rho)=\infty$，因此 $z=1$是一个奇点.

其次，由于 $f(z)=z+f(z^2)$，$f(z)$在 $z^2=1$亦即 $z=1$及 $z=-1$处不解析，同样，由于$f(z)=z+z^2+f(z^4)$满足 $z^4=1$的点是$f(z)$的奇点，以此类推，对任何自然数 n，满足 $z^{2^n}=1$的点，亦即1的2^n 次根，都是 $f(z)$的奇点，因为$|z|=1$上每一点或者是这些奇点中的一个，或者是它们的聚点，所以$|z|=1$上每一点都是奇点，即$|z|=1$为其自然边界.

§2 多值函数的黎曼曲面

从解析开拓的观点来看，一个完全解析函数 $F(z)$是从它的第一个解析元素出发，利用一切可能的解析开拓逐渐形成的. 这样所产生的解析函数，对于一个点 z_0而言，只要 z_0是正则点，而且无论经过哪一条路线进行解析开拓达到这一点 z_0，函数 $F(z)$在这点的值总是相等的话，则这个解析函数 $F(z)$在 z_0的邻域内是单值的，

对于多值函数来讲，情况就不是这样，在进行解析开拓时，同一个点在不同的开拓里会得到不同的函数值，对多值函数 $w=f(z)$ 来说，当给定一个 z 值，可得到有限多个甚至无穷多个函数值，这些不同的函数值，对应于多值函数的不同分支. 为了给多值函数的各分支间相互关系的几何直观，我们可把多值函数的各分支在 z 平面上解析的域看作是按照某种方式粘合起来的叶片，称它为这个函数的**黎曼曲面**. 这样多值函数 $F(z)$ 可看作是在它的黎曼曲面上的单值函数，下面我们通过例子来说明如何构造多值函数的黎曼曲面：

例1 $w=\sqrt[n]{z}$ 的黎曼曲面

我们在第二章中已知这是一个 n 值函数，它在 z 平面去掉负实轴的域 D 内能分出 n 个单值解析分支

$$w_k(z)=\sqrt[n]{|z|}\mathrm{e}^{\frac{\arg z+2k\pi\mathrm{i}}{n}}\quad(k=0,1,2,\cdots n-1),$$

这 n 个函数把 D 变为 w 平面上的 n 个角域

$$G_k:\ \frac{(2k-1)\pi}{n}<\arg w<\frac{(2k+1)\pi}{n}\quad k=0,1,\cdots,n-1.$$

即这 n 个角域 G_k 都对应于同一个域 D，G_k 中的 $w_k(z)$ $(k=0,1,\cdots,n-1)$都对应于 D 内的同一点 z，现在我们把点 z 看作 n 个相同的值叠在一起，即把 D 看作是 n 个域 D_k：$(2k-1)\pi<\arg z<(2k+1)\pi$ $(k=0,1,\cdots,n-1)$ 重叠在一起. 设 l_k 是射线 $\arg z=(2k-1)\pi$ $(k=0,1,\cdots n)$，函数 $w_0(z)$在 D_0内单叶解析，且在 D_0内连续到下边沿 l_0与上边给 l_1，把 D_0映为 G_0，其中 l_0与 l_1分别对应于角域的两条边 $\arg w=-\frac{\pi}{n}$和 $\arg w=\frac{\pi}{n}$.

函数 $w_1(z)$在 D_1内单叶解析，且在 D_1内连续到下边沿 l_1与上边沿 l_2，把 D_1映为 G_1，l_1与 l_2分别对应于射线 $\arg w=\frac{\pi}{n}$与 $\arg w=\frac{3\pi}{n}$，在 l_1上，$w_1(z)=w_2(z)$ 由定理1.2，函数

$$F(z) = \begin{cases} w_0(z), & z \in l_0 + D_0 + l_1 \\ w_1(z), & z \in l_1 + D_1 + l_2 \end{cases}$$

在区域 $D_0+D_1+l_0+l_1+l_2$ 内解析，即 $w_0(z)$ 越过 l_1 解析开拓为 $w_1(z)$，同理 $w_1(z)$ 越过 l_2 解析开拓为 $w_2(z)$，依次类推，$w_{n-2}(z)$ 越过 l_{n-1} 解析开拓为 $w_{n-1}(z)$，最后，由于 $w_0(z)$ 在 D_0 内连续到 l_0，$w_{n-1}(z)$ 在 D_{n-1} 内连续到 l_n，且当 l_0 与 l_n 上具有相同坐标的点 z，有 $w_0(z)=w_{n-1}(z)$，因此我们得函数

$$F(z) = \begin{cases} w_0(z), & z \in l_0 + D_0 + l_1 \\ w_1(z), & z \in l_1 + D_1 + l_2 \\ w_2(z), & z \in l_2 + D_2 + l_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ w_{n-1}(z). & z \in l_{n-1} + D_{n-1} + l_n \end{cases}$$

现在我们把 D_0 与 D_1 沿 l_1 粘起来，D_1 与 D_2 沿 l_2 粘起来，D_{n-2} 与 D_{n-1} 沿 l_{n-1} 粘起来，最后把 D_0 的下边沿和 D_{n-1} 的上边沿粘起来. 事实上这是不可能的，仅是我们设想把这两边上具有相同坐标的点看作是同一点罢了. 这样我们就得到粘起来的 n 叶"曲面"如图 2.1所示. 这个"曲面"称为多值函数 $\sqrt[n]{z}$ 的黎曼曲面. 注意 $\sqrt[n]{z}$ 的支点 $z=0$ 不在曲面上，$F(z)$ 在黎曼曲面上是单值解析的，在其每一叶上定义 $\sqrt[n]{z}$ 的一个分支.

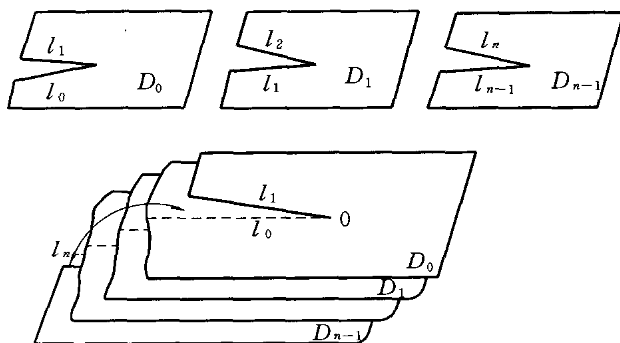


图 2.1

例2　$w=\mathrm{Ln}z$ 的黎曼曲面

在第二章中已知在 z 平面上去掉负实轴的域 D 内可分出对数函数的单值解析分支

$$w_k(z)=\ln|z|+\mathrm{i}(\arg z+2k\pi),\quad k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$$

这无穷多个分支 $w_k(z)$ 把 D 变为带域 B_k：

$$B_k:\ (2k-1)\pi<\mathrm{Im}w<(2k+1)\pi,$$

与前面根式函数一样，$w_k(z)$ 可越过 l_{k+1} 解析开拓为 $w_{k+1}(z)$，然后把 $w_k(z)$ 的定义域 D_k 与 $w_{k+1}(z)$ 的定义域 D_{k+1} 沿 l_{k+1} 粘起来，就得到 $\mathrm{Ln}z$ 的黎曼曲面，如图2.2所示，这里所不同的是 $\mathrm{Ln}z$ 的黎曼曲面是无穷多叶的，函数

$$F(z)=\begin{cases}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ w_2(z), & z\in l_2+D_2+l_3 \\ w_1(z), & z\in l_1+D_1+l_2 \\ w_0(z), & z\in l_0+D_0+l_1 \\ w_{-1}(z), & z\in l_{-1}+D_{-1}+l_0 \\ w_{-2}(z), & z\in l_{-2}+D_{-2}+l_{-1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{cases}$$

在黎曼曲面上是单值解析的，在其每一叶上定义它的一个分支.

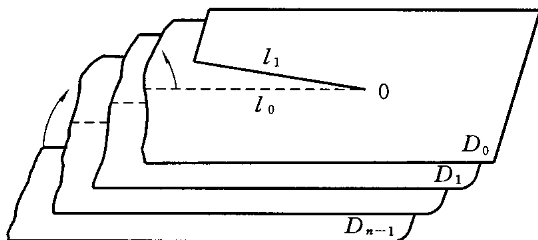


图 2.2

第二篇　实　分　析

第七章　集·直线上的点集

§1　集合及其运算

集合或集是抽象分析的一个最基本概念. 我们在实分析中主要讨论直线上点集的测度与积分,同时也将介绍一般抽象点集的测度和积分. 本节主要介绍点集拓扑中一些常用的记号以及关于集合的并、交、差(补)运算.

现代数学中,已经广泛深入地运用了集合这个概念. 凡是具有某一特性的事物全体称为一个**集合**,简称为**集**,其中每个成员称作集合的**元素**或**元**. 例如,自然数全体;实系数多项式全体;又如直线上一切开区间(a,b)全体组成的一个集(或称**集类**),这个集合的元是开区间.

今后我们常用大写字母 $A,B,X,Y\cdots$ 等表示集合,小写字母 $a,b,c,\cdots$ 等表示集合的元.

假设 A 是一个集合,a 是它的元,就记为 $a\in A$,读作 a 属于 A,若 a 不属于 A,就记为 $a\overline{\in} A$ 或 $a\notin A$.

一个具体的集合 A 可以通过列举其元素 $a,b,c,\cdots$来表示,并记为

$$A = \{a, b, c, \cdots\},$$

也可通过集合 A 中的元素必须而且只须满足条件 P 来表示，记为

$$A = \{x: x \text{ 满足条件 } P\}.$$

例如：

$$\text{自然数全体 } N = \{1, 2, 3, \cdots\},$$

$$\text{实数全体 } R = \{x: x \in (-\infty, +\infty)\},$$

$$\text{不等式 } |\cos x| \geqslant \frac{1}{2} \text{ 的解的集合 } S,$$

$$S = \left\{x: |\cos x| \geqslant \frac{1}{2}\right\}.$$

如果 A 的元只有有限个，则称 A 为**有限集**；不含任何元的集称为**空集**. 记为$\varnothing$；一个非空集，如果不是有限集，就称为**无限集**；如果 A 的每个元都属于 B，则称 A 是 B 的**子集**，记成 $A \subset B$ 或 $B \supset A$；空集可以看成任何集合的子集；如果 $A \subset B$，且 B 中确有元不属于 A，则称 A 是 B 的**真子集**；如果 $A \subset B$，且 $B \subset A$，称 A 与 B 相等，记为 $A = B$.

下面引进集合的运算，最常用的运算有“并”、“交”、“差”三种.

设 A, B 是两个集，由 A 和 B 的一切元素所组成的集称作 A 与 B 的**并集**，记为 $A \cup B$(图7.1)，它可表示为：

$$A \cup B = \{x: x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

由一切既属于 A 又属于 B 的元素所组成的集称作 A 与 B 的**交集**，记为 $A \cap B$(图7.2)，它可表示为

$$A \cap B = \{x: x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

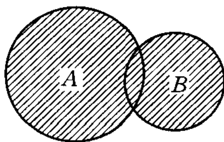


图 7.1　$A \cup B$

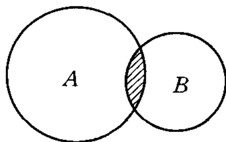


图 7.2　$A \cap B$

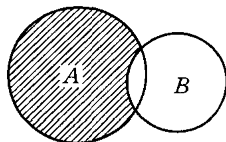


图 7.3　$A - B$

由集 A 中不属于 B 的那些元素全体所组成的集，称作 A 与 B

的**差集**. 记为 $A-B$(图7.3),它可表示为

$$A-B=\{x:x\in A,\text{但 }x\overline{\in}B\}.$$

特别地,当 $B\subset A$ 时,称差集 $A-B$ 为 B 关于 A 的**补集**,记为 $\mathscr{C}_A B$.

设 X 为基本集,$A\subset X$,$B\subset X$,A 关于基本集 X 的补集常简记为 $\mathscr{C}A$ 或 $A^{\mathscr{C}}$,显然 $A-B=A\cap\mathscr{C}B$.

并集概念和交集概念可以推广到任意多个集合的情形. 设有一族集合 $\{A_\alpha:\alpha\in I\}$,这里 I 是**指标集**,指标 α 在 I 中变化,则它们的并和交分别表示为

$$\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha=\{x:\text{存在某个 }\alpha\in I,\text{使 }x\in A_\alpha\},$$

$$\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha=\{x:\text{对一切 }\alpha\in I,\text{有 }x\in A_\alpha\}.$$

例如　$I=[0,1]$, $A_\alpha=(1-\alpha,1+\alpha)$, 则

$$\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}(1-\alpha,1+\alpha)=(0,2),$$

$$\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha=\bigcap_{\alpha\in[0,1]}(1-\alpha,1+\alpha)=\{1\}.$$

其中$\{1\}$表示只含有一个元素1的**单点集**.

读者容易证明"并"和"交"运算满足下面的分配律、结合律和交换律.

交换律:$A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$.

结合律:$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

分配律:$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,

$A\cap(\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in I}(A\cap B_\alpha)$.

关于求"补"运算有下面的笛摩根(De Morgan)法则.

定理1.1　设 X 是基本集,E,$A_\alpha\subset X(\alpha\in I)$, 则

(1) $\mathscr{C}(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha)=\bigcap_{\alpha\in I}\mathscr{C}A_\alpha$, $E-(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha)=\bigcap_{\alpha\in I}(E-A_\alpha)$,

(2) $\mathscr{C}(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in I}\mathscr{C}A_\alpha$, $E-(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in I}(E-A_\alpha)$.

证　(1) $x\in\mathscr{C}(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha)$等价于 $x\in X$, 且对每一个 $\alpha\in I$,$x\overline{\in}$

A_α，它又等价于对每一个 $\alpha\in I$，有 $x\in\mathscr{C}A_\alpha$，即等价于 $x\in\bigcap_{\alpha\in I}\mathscr{C}A_\alpha$．类似地，可证明 $E-\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha=\bigcap_{\alpha\in I}(E-A_\alpha)$，故(1)成立．

(2) 记 $B_\alpha=\mathscr{C}A_\alpha$，由(1)得

$$\mathscr{C}\bigcup_\alpha B_\alpha=\bigcap_\alpha\mathscr{C}B_\alpha,$$

即

$$\bigcap_\alpha A_\alpha=\mathscr{C}\bigcup_\alpha\mathscr{C}A_\alpha,$$

所以

$$\mathscr{C}\bigcap_\alpha A_\alpha=\bigcup_\alpha\mathscr{C}A_\alpha.$$

类似地，可证

$$E-\bigcap_\alpha A_\alpha=\bigcup_\alpha(E-A_\alpha).$$

所证定理常称为笛摩根法则，它提供一种对偶方法，能将已证明的关于集的某种性质转移到它们的补集上去，这种对偶方法在以后的定理证明中多次用到．

为了今后的需要，我们引进集合序列的上限集、下限集两个概念．

定义1.1 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$是任意的一列集合，$\{A_n\}$的**上限集**、**下限集**分别定义为

$$\overline{\lim_n}A_n=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}A_n,\quad \underline{\lim_n}A_n=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}A_n.$$

不难证明 $x\in\overline{\lim_n}A_n$ 等价于 x 属于无限多个集 A_n 之中，而 $x\in\underline{\lim_n}A_n$ 等价于 x 属于从某个 n 开始(n 可随 x 而异)以后的一切集合之中．

事实上，若 $x\in\overline{\lim_n}A_n$，令 $B_k=\bigcup_{n=k}^{\infty}A_n$，则 x 属于一切点集 B_k 之中，由 $x\in B_1$，可知有集合 A_{k_1} 含有 x，由 $x\in B_{k_1+1}$ 可知有 A_{k_2}($k_2>k_1$)含有 x，如此继续下去，可得一列 A_{k_i}($i=1,2,3,\cdots$)，它们都含有 x．反之，若存在一列$\{A_{k_i}\}$都含有 x，则对一切 k，$x\in\bigcup_{n=k}A_n$，从而 $x\in\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}A_n$．同理，可考虑$\underline{\lim_n}A_n$ 的情形．由此可知$\underline{\lim_n}A_n\subset$

$\overline{\lim_n} A_n$，如果

$$\underline{\lim_n} A_n = \overline{\lim_n} A_n,$$

则称集列$\{A_n\}$收敛，其极限 $A=\underline{\lim_n} A_n=\overline{\lim_n} A_n$，记为 $A=\lim_n A_n$.

定理1.2 设$\{A_n\}$是任意一列集合，E 是任一集，则

$$E - \overline{\lim_n} A_n = \underline{\lim_n}(E - A_n),$$

$$E - \underline{\lim_n} A_n = \overline{\lim_n}(E - A_n).$$

证 由笛摩根法则

$$E - \overline{\lim_n} A_n = E - \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\bigcap_{n=k}^{\infty} (E - A_n) \right)$$

$$= \underline{\lim_n}(E - A_n).$$

同理可证

$$E - \underline{\lim_n} A_n = \overline{\lim_n}(E - A_n).$$

如果 $A_n \subset A_{n+1}$ ($A_n \supset A_{n+1}$)，$n=1,2,3,\cdots$，则称$\{A_n\}$为**渐张序列**（**渐缩序列**），通称为**单调集列**. 读者容易证明单调集列必是收敛的.

定理1.3 如果$\{A_n\}$是渐张序列，则

$$\lim_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

如果$\{A_n\}$是渐缩序列，则

$$\lim_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

§2 映射·集的对等·可列集

我们知道数学分析中所讲的一元函数可以看作直线上的数集与数集之间的一种对应关系，在抽象分析中，称一个集合与另一个集合的对应关系为映射，它是函数概念的推广.

定义2.1 设 A, B 为两个非空集合，若对每个 $x \in A$，依一定

法则 φ,存在唯一的元素 $y\in B$ 与 x 对应,则 φ 是定义在 A 上而在 B 中取值的**映射**,记成 $\varphi:A\to B$,并将 x 与 y 的对应关系写成 $y=\varphi(x)$. 我们称 A 为 φ 的**定义域**,$\varphi(A)=\{\varphi(x):x\in A\}$ 为 φ 的**值域**.

例1 设 $C_{[0,1]}$是区间[0,1]上所有连续函数全体,$R=(-\infty,+\infty)$,作映射

$$\varphi:f\to\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x,\ f\in C_{[0,1]},$$

则 φ 是 $C_{[0,1]}$到 R 的映射.

例2 取定 $x_0\in[0,1]$, 作 $C_{[0,1]}\to R$ 的映射

$$\varphi:f\to f(x_0),\ f\in C_{[0,1]},$$

则 φ 也是 $C_{[0,1]}$到 R 的映射.

设 φ 是 A 到 B 的映射,如果对任何 $x,y\in A$, 当 $x\neq y$ 时,总有

$$\varphi(x)\neq\varphi(y),$$

则称 φ 是**单射**(injective),φ 单射时,$\varphi:A\to\varphi(A)$可逆,存在逆映射 $\varphi^{-1}:\varphi(A)\to A$;如果映射 φ 满足 $\varphi(A)=B$,则称 φ 是 A 到 B 的**满射**(Surjective); 如果 φ 是单射,同时又是满射,则称 φ 是 A 到 B 的**双射**(bejective), 也称 φ 是 A 到 B 上的**一对一映射**. 此时,φ 是 A 到 B 上的可逆映射.

设给定两个映射 $\varphi:A\to B,\psi:B\to C$,则映射 $h=\psi\cdot\varphi:A\to C,\psi\cdot\varphi(x)=\psi(\varphi(x))$是 φ 与 ψ 的复合映射. 设 $B_0\subset B$,用记号 $\varphi^{-1}(B_0)$表示 B_0在映射 φ 下的原象,即

$$\varphi^{-1}(B_0)=\{x:x\in A,\ \varphi(x)\in B_0\}.$$

这里 $\varphi^{-1}(B_0)$不是逆映射的值域,而是 B_0的原象,即使不存在逆映射(即不是单射),原象 $\varphi^{-1}(B_0)$同样有意义.

为了对集合按其所含元素"个数"进行分类,我们引入集合与集合之间对等的概念,这个概念是下面建立势的理论的基础.

定义2.2 设 A,B 是两个非空集合,如果存在一个 A 到 B 上的一对一映射 φ,则称 A 与 B **对等**,记成 $A\sim B$.

例3 $A=\{$自然数全体$\}$，$B=\{$正偶数全体$\}$，则 $A\sim B$.

事实上，只要令$\varphi(x)=2x$，其中 x 取自然数.

例4 区间$(0,1)$和实数全体 $r=(-\infty,+\infty)$对等，只要令 $\varphi(x)=\text{tg}(\pi x-\frac{\pi}{2})$即可.

显然对等关系"$\sim$"有下列性质：

(1) 自反性. $A\sim A$,

(2) 对称性. 若 $A\sim B$，则 $B\sim A$,

(3) 传递性. 若 $A\sim B$，$B\sim C$，则 $A\sim C$.

一般地，也称满足上面三条基本性质的"关系"为等价关系.

对于有限集 A,B，$A\sim B$ 当且仅当 A 与 B 的元素个数相同. 对无限集，虽不能比较元素的个数，但可以用对等关系来比较两个无限集合元素的"个数"，简单地讲，$A\sim B$，就可以说 A 与 B 的元素"个数"相同. 例3，例4说明一个无限集能与它的某些真子集(无限集)对等.

在所有无限集中，自然数集 N 是最简单的一个，若 $A\sim N$，则称 A 为**可列集**. 如果 φ 是 N 到 A 的一对一映射，记 $a_n=\varphi(n)$，则可表示成

$$A=\{a_1,a_2,a_3,\cdots\}.$$

例5 $A=\{$整数全体$\}$.

作 A 与 N 的一一对应如下：

$0\leftrightarrow 1$，A 中负整数$\{-1,-2,-3,\cdots\}\leftrightarrow N$ 中的$\{$偶数$\}$，

A 中正整数$\{1,2,3,\cdots\}\leftrightarrow N$ 中大于等于3的奇数全体.

即

$$0\leftrightarrow 1,\ (-1)^{n+1}\left[\frac{n}{2}\right]\leftrightarrow n\quad (n=2,3,4,\cdots).$$

其中记号$[x]$表示不超过 x 的最大整数.

显然，可列集的任何子集，若不是有限集必是可列集；任何无限集都至少包含一个可列子集.

事实上，设 A 为可列集，则 $A=\{a_1,a_2,a_3,\cdots\}$，任取 A 的非空

子集 B,B 中元素是上面序列中的一个子序列,即 $B=\{a_{n_1},a_{n_2},\cdots,a_{n_k},\cdots\}$,因此,若 B 不是有限集,则 B 中元素 a_{n_k} 与自然数 k 一一对应,故 B 必是可列集.

设 A 是无限集,可取出 $a_1\in A$,由于 A 为无限集,则 $A-\{a_1\}$ 非空,又可取出 $a_2\in A-\{a_1\}$,…,由归纳法,可得 A 的一个可列子集 $\{a_1, a_2,\cdots,a_n, \cdots\}$.

定理2.1 可列个可列集的并集是可列的.

证 设 $A_k=(k=1,2,3,\cdots\}$ 是可列集,记

$$
\begin{aligned}
A_1&=\{a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, \cdots\}\\
A_2&=\{a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, \cdots\}\\
A_3&=\{a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}, \cdots\}\\
A_4&=\{a_{41}, a_{42}, a_{43}, a_{44}, \cdots\}\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

$S=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$,称 $m=i+j$ 为元素 $a_{ij}(i,j=1,2,3,\cdots)$ 的高度,把 $\{a_{ij}\}$ 按高度 m 由小到大排列,同一高度 按 j 的值由小到大排列,这样就可把 S 中的元素排成一列(即上图箭头所指顺序):

$$\{a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{31}, a_{22}, a_{13}, \cdots,a_{n1}, a_{n-1,2}\cdots,a_{1,n}, \cdots\}.$$

如有必要,依次除去重复的元(保留一个),即可知 S 是可列集.

例6 一切有理数全体 Q 是可列集.

事实上,设 $r\in Q,r\neq 0$,则 $r=\dfrac{p}{q}$(既约分数),不妨设 $q>0$,称 $n=|p|+q$ 为 r 的“模”,并规定0的模为1,显然模为 n 的有理数全体 A_n 是有限集,$Q=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$,故 Q 是可列集.

例7 直线上一类互不相交的开区间集至多是可列集.

证 在每个开区间中取有理数与这个区间对应,则不同的区间对应于不同的有理数,从而所述开区间集与有理数集 Q 的一子集对等,故至多可列.

例8 平面上一切坐标为有理数的集合为可列集.

证 $A=\{(x,y):x,y$ 均为有理数$\}$,令

$A_i=\{(x,y_i):\ y_i$ 为固定的一有理数$,x\in Q\}$,显然每个 A_i 可列,而 $A=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$,故 A 可列.

同样,用归纳法可证

$$B=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):\ x_i \text{ 均为有理数}, i=1,2,\cdots,n\}$$

也是可列集.

定理2.2 区间$[0,1]$中的点是不可列的.

证 用反证法,假定$[0,1]$中的点可列,即$[0,1]$中点可编号为

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\cdots,x_n,\cdots,$$

把闭区间$[0,1]$三等分,则显然$[0,\ 1/3]$与$[2/3,1]$中总有一个区间不含有 x_1,用 I_1表示这个区间,把 I_1三等分,在它们的左与右两个闭区间中总有一个不含有 x_2,用 I_2表示这个区间,再把 I_2三等分,同样可得不含有 x_3的一个闭区间 I_3等等.由归纳法,我们可得一列闭区间$\{I_n\}$,满足:

$$I_1\supset I_2\supset\cdots\supset I_n\supset\cdots,$$

$$x_n\overline{\in} I_n,\ n=1,2,3,\cdots.$$

由于 I_n 的长度为$\frac{1}{3^n}$趋于0,故据分析中的区间套定理,存在 $\xi\in I_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$, 由于 $x_n\overline{\in} I_n$,故

$$\xi\neq x_n,\ n=1,2,3,\cdots,$$

这与 $\xi\in[0,1]$矛盾,故$[0,1]$中的点是不可列的.

§3 集的势·半序集

3.1 集的势

上一节我们已经看到,有限集 $A\sim B$ 当且仅当 A 和 B 的元素个数相同,在无限集中,可列集是与自然数集 N 对等的一类集合,

按对等的定义，$A\sim N$ 也可看作集合 A 与 N 的元素“个数”一样多，我们还证明了$[0,1]$是不可数的. 本节将借助对等概念把无限集分类，引进所谓势的概念.

我们规定彼此对等的集归于同一类，不对等的集属于不同的类，对于这样的每类集，赋予一个记号，称为这类集中每个集的**势**. 用 $\overline{\overline{A}}$ 表示集合 A 的势，规定有限集的势为元素的个数，可列集的势为$\aleph_0$（读作“阿列夫零”），与区间$[0,1]$对等的集的势为$\aleph$（读作“阿列夫”），称为**连续集的势**.

势的大小仍借用对等来定义：若 $A\sim B_0\subset B$，则称 $\overline{\overline{A}}\leqslant\overline{\overline{B}}$；若 $A\sim B_0\subset B$，且 A 与 B 不对等，则称 $\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$，因此，显然有

$$n<\aleph_0<\aleph.$$

关于势的比较，有下列常用的伯恩斯坦(F. Bernstain))定理.

定理3.1 如果 A 对等于 B 的一个子集，B 又对等于 A 的一个子集，则 A 与 B 必对等(即如果 $\overline{\overline{A}}\leqslant\overline{\overline{B}}$，$\overline{\overline{B}}\leqslant\overline{\overline{A}}$，则 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$).

证 设 $\overline{\overline{A}}=\lambda$，$\overline{\overline{B}}=\mu$，由 $\lambda\leqslant\mu$ 知存在 $B_0\subset B$ 以及 $A\to B_0$的一一映射 f，使 $A\overset{f}{\sim}B_0$. 同样，由 $\mu\leqslant\lambda$ 知存在 $A_0\subset A$ 以及 $B\to A_0$的一一映射 g，使 $B\overset{g}{\sim}A_0$(图7.4).

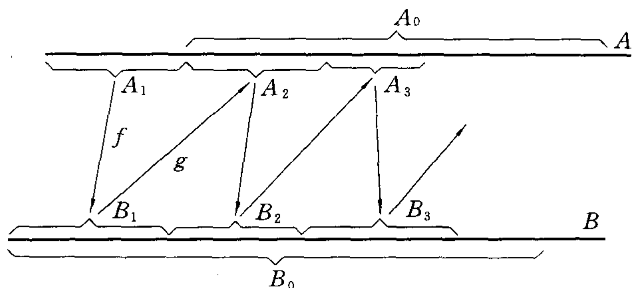


图 7.4

令 $A_1=A-A_0$，$f(A_1)=B_1$，$g(B_1)=A_2\subset A_0$，

$f(A_2)=B_2$，$g(B_2)=A_3\subset A_0$，

$$f(A_3)=B_3,\ \cdots\cdots\cdots$$

由于 f,g 都是一一映射，故 $A_1,A_2,A_3,\cdots$ 等互不相交，$B_1,B_2,B_3,\cdots$ 等也互不相交. 显然 $A_n\overset{f}{\sim}B_n, n=1,2,3,\cdots$，故

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n \overset{f}{\sim} \bigcup_{n=1}^{\infty}B_n.$$

另一方面，由映射 g 知 $B\overset{g}{\sim}A_0$，$B_k\overset{g}{\sim}A_{k+1}$，$k=1,2,3,\cdots$，故

$$B-\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k \overset{g}{\sim} A_0-\bigcup_{k=1}^{\infty}A_{k+1} = A-\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n,$$

从而

$$A=(A-\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)\cup(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)\sim(B-\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n)\cup(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n)=B.$$

故 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$.

定理3.2 设 B 是任一无限集，A 是有限集或可列集，则

$$\overline{\overline{A\cup B}}=\overline{\overline{B}}.$$

证 我们只须证明 $A\cup B\sim B$. 因为 B 是无限集，必存在一个可列子集 $M\subset B$，由定理2.1知 $M\cup(A-B)$可列，则 $M\overset{\varphi}{\sim}M\cup(A-B)$. 显然有

$$B=(B-M)\cup M,$$

$$A\cup B=(B-M)\cup(M\cup(A-B)),$$

其中$(B-M)\cap(M\cup(A-B))=\varnothing$，作映射 $\varphi_1:B\to A\cup B$ 如下：

$$\varphi_1(x)=\begin{cases}x,\ x\in B-M\\ \varphi(x),\ x\in M\end{cases}$$

则 φ_1是 $B\to A\cup B$ 上的一一映射，从而$\overline{\overline{A\cup B}}=\overline{\overline{B}}$.

例1 实数全体所成之集 R 的势为$\aleph$，无理数全体的势也为$\aleph$.

证 由定理3.2显然可知$(0,1)$与$[0,1]$的势相同，所以只要证明$(0,1)$与 R 对等即可，令

$$\varphi(x)=\operatorname{tg}\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)\pi\right),$$

则 φ 是$(0,1)$到 R 的一一映射，故 $\overline{\overline{R}}=\aleph$.

记无理数全体为 B，有理数全体为 Q，据定理3.2

$$\overline{\overline{B}} = \overline{\overline{B \cup Q}} = \overline{\overline{R}} = \aleph.$$

例2 设实数列全体 $R^{\infty}=\{(x_n): x_n$ 为实数，$n=1,2,3,\cdots\}$，试证明：$\overline{\overline{R^{\infty}}}=\aleph$.

证 令 $B=\{(x_n): 0<x_n<1, n=1,2,3,\cdots\}$，作映射 $\varphi: B\to R^{\infty}$ 如下：

$$\varphi(x) = \left(\mathrm{tg}\left(x_1 - \frac{1}{2}\right)\pi, \mathrm{tg}\left(x_2 - \frac{1}{2}\right)\pi, \cdots\cdots\right).$$

显然 φ 是 $B\to R^{\infty}$ 上的一对一映射，所以 $B\sim R^{\infty}$，故只须证明 $\overline{\overline{B}}=\aleph$.

$x\in B$，$x=(x_1, x_2,\cdots,x_n,\cdots)$，按十进位无限小数表示每个 x_n，有

$$x_1=0\cdot x_{11}\, x_{12}\, x_{13}\cdots\, x_{1n}\cdots,$$
$$x_2=0\cdot x_{21}\, x_{22}\, x_{23}\cdots\, x_{2n}\cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n=0\cdot x_{n1}\, x_{n2}\, x_{n3}\cdots\, x_{nn}\cdots.$$

作映射 $\psi: B\to(0,1)$ 如下：

$$\psi(x)=0\cdot x_{11}x_{21}x_{12}x_{13}x_{22}x_{31}\cdots x_{n1}x_{n-1\,2}\cdots x_{1n}\cdots,$$

显然 $\psi(x)\in(0,1)$，且当 $x\neq y$ 时，$\psi(x)\neq\psi(y)$，故 $B\sim(0,1)$的一个子集，反之，$x\in(0,1)$与 B 中的点 $\tilde{x}=(x, x, x, \cdots)$对应，故$(0,1)\sim B$ 的一个子集，按照定理3.1，$\overline{\overline{B}}=\overline{\overline{(0,1)}}=\aleph$.

例3 $R^n=\{(x_1, x_2, \cdots,x_n): x_k$ 为实数，$k=1,2,\cdots,n\}$的势为 $\aleph$.

证 首先 $R^n\sim R^{\infty}$ 的一个子集 $B_0=\{(x_1, x_2,\cdots, x_n, 0, 0,\cdots)\}$；另一方面$[0,1]\sim R^n$ 的一个子集 $A_0=\{(x, x, \cdots,x): 0\leqslant x\leqslant 1\}$，故 R^n 的势为 $\aleph$.

前面讨论了 $\aleph_0$ 和 $\aleph$ 这两个重要的无限集的势，并且 $\aleph_0<\aleph$，是否存在一个势 α，使得 $\aleph_0<\alpha<\aleph$ 成立？康托首先看到了这个自然而基本的问题，但他并没有解决这一问题，他猜想介于 $\aleph_0$ 和 $\aleph$

中间的势 α 是不存在的(1878年)，这就是著名的连续统假设：没有大于$\aleph_0$而小于$\aleph$的势．这个猜想多少年来没有得到证明，直到1963年，科恩证明了：连续统假设可以作为一个公理，它与集合论中其它一些公理(包括选择公理在内)是相互独立的．

*3.2 半序集和佐恩引理

在实数集中有大小概念，依此建立了实数的一种顺序，对于一般的集合，不是任何两个元素之间都可以自然地定义顺序，通常有可能只是一部分元素之间具有顺序关系．下面我们引进一个集合的序概念．

定义3.1 对于给定的集合 X，如果在它的元素之间能引进关系"$\leqslant$"(或$\prec$)满足以下条件：

(1) 自反性：$a\leqslant a$，

(2) 传递性：若 $a\leqslant b$，$b\leqslant c$，则 $a\leqslant c$，

(3) 若 $a\leqslant b$，$b\leqslant a$，则 $a=b$．

则称关系"$\leqslant$"为 X 的一个序关系，X 为带有序"$\leqslant$"的**半序集**．

如果"$\leqslant$"还满足条件

(4) 对 X 中任何两个元素 a，b，必有 $a\leqslant b$ 或 $b\leqslant a$，则称 X 为**全序集**．

例4 非空集合 A 的一切子集组成的集类 $\mathscr{A}$ 中，定义"$\leqslant$"如下，若 $A_1, A_2\in\mathscr{A}$，$A_1\subset A_2$，则称 $A_1\leqslant A_2$，则"$\subset$"就是 $\mathscr{A}$ 的一个序关系，$\mathscr{A}$ 是一个半序集．

例5 黎曼积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 中，$[a,b]$的分法 π 全体记为 A，在 A 中规定：若 $\pi_1, \pi_2\in A$，π_1的分点$\subset\pi_2$的分点中，则称 $\pi_2\prec\pi_1$，A 是一个半序集．

例6 设 $X=R^2$，$x=(x_1, x_2)$，$y=(y_1, y_2)$，若规定 $x\prec y$ 当且仅当 $x_1\leqslant y_1$，$x_2\leqslant y_2$，则 X 是一个半序集；若规定 $x\prec y$ 当且仅当 $x_1<y_1$或者 $x_1=y_1$，但 $x_2\leqslant y_2$，则 X 成为一个全序集，称这个序

关系“$<$”为**字典序**.

定义3.2 设 X 为半序集，$X_0 \subset X$，

(1) 若存在 $b \in X$，使对一切 $x \in X_0$，有 $x \leqslant b(x \geqslant b)$，则称 b 为 X_0的**上界**(**下界**). 最小上界称为 X_0的**上确界**，仍记为 $\sup X_0$(最大下界称为 X_0**下确界**，记为 $\inf X_0$).

(2) 若 b 是 X_0的上界(下界)，且 $b \in X_0$，则称 b 为 X_0的**最大元**(**最小元**).

(3) 若 $b \in X_0$，对一切 $x \in X_0$有 $x < b$ 或者 x 与 b 无关系，则 b 为 X_0的**极大元**(极小元类似可定义).

显然，若 b 是 X_0的最大元，则 b 一定是 X_0的极大元，且唯一，反之，极大元不一定是最大元，全序集中极大元一定是最大元.

例如在例4中，A 一定是 $\mathscr{A}$ 的最大元，空集$\varnothing$是 $\mathscr{A}$ 的最小元，又如 $X_0 = \{A_1, A_2\} \subset \mathscr{A}$，“$\subset$”为序关系，则 A_1, A_2都是 X_0的极大元(极小元)，但不是最大元(最小元).

下面介绍一个命题，它是研究“无限过程”的一个极为重要的工具，在泛函分析的基本理论中不可缺少.

佐恩(Zorn)引理 设 X 为非空半序集合，如果 X 的每一非空全序子集都有上界，则 X 至少有一个极大元.

类似地还有关于下界和极小元的引理.

佐恩引理的证明要借助于下面的一个较为直观而易于接受的策墨罗选择公理.

策墨罗选择公理 设 $\mathscr{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$是一非空集类，则存在映射 $f: \mathscr{A} \to \bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$，使得对每一个 $A_\alpha \in \mathscr{A}$，有 $f(A_\alpha) \in A_\alpha$.

选择公理的意思是说，对于集类 $\mathscr{A}$，可以作这样一个集合 E，它是由 $\mathscr{A}$ 中每个元 A_α 中取一点所组成的. E 的存在性直观上比较明显，人们可以接受，所以作为一个公理承认它. 实际上还可以证明佐恩引理和策墨罗选择公理彼此是等价的，这里我们不作介绍了.

§4 数直线 R 中的点集

本节根据测度论，积分论的需要，介绍 R 中点集的最基本的一些概念，如开集、闭集、连续函数等，给出一维开集的构造定理，最后将讨论一个特殊的点集——康托三分集，它是实分析中一个重要例子，有许多奇特的性质，常被用来表现一些复杂的现象.

4.1 一维开集，闭集及其性质

定义4.1 设 $E\subset R$，$a\in R$，称含有 a 的任一开区间为 a **的邻域**；$a\in E$，如果 a 的邻域$(\alpha,\beta)\subset E$，则称 a 为 E **的内点**；如果 E 的每一点都是 E 的内点，则称 E 为**开集**；规定空集$\varnothing$为开集.

显然开区间(α,β)和 R 本身都是一维开集.

定理4.1 开集有下列性质：

(1) 任意个开集的并是开集，

(2) 有限个开集的交是开集.

证 (1)设$\{G_\alpha,\alpha\in I\}$是一族开集，$G=\bigcup\limits_{\alpha\in I}G_\alpha$，任取 $x\in G$，则有某个 $\alpha_0\in I$，使 $x\in G_{\alpha_0}$，故 x 是 G_{α_0} 的内点，从而更是 G 的内点，因此 G 是开集.

(2) 设 $G_1,G_2,\cdots,G_n$ 为开集，$G=\bigcap\limits_{k=1}^{n}G_k$，任取 $x\in G$，则对一切 $k=1,2,\cdots,n$，有 $x\in G_k$，于是有 x 的邻域(α_k,β_k)，使

$$x\in(\alpha_k,\beta_k)\subset G_k,\ k=1,2,\cdots,n$$

令 $(\alpha,\beta)=\bigcap\limits_{k=1}^{n}(\alpha_k,\beta_k)$，$\alpha=\sup\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\alpha_k$，$\beta=\inf\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\beta_k$，则 $x\in(\alpha,\beta)\subset G$，故 G 是开集.

注意，无限多个开集的交不一定是开集，例如，$G_k=\left(-\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right)$，$k=1,2,3,\cdots$，则$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}G_k=\{0\}$，不是开集.

定义4.2 设 $E\subset R$，若 $\mathscr{C}E=R-E$ 为开集，则称 E 为**闭集**.

利用集合的笛摩根法则，可以将开集的性质对偶地转移到闭集上去.

定理4.2 闭集有下列性质：

(1) 空集与 R 本身均是闭集，

(2) 任意多个闭集的交为闭集，

(3) 有限多个闭集的并为闭集.

证 我们仅证明(2)，设 $F_\alpha(\alpha\in I)$为一族闭集，则 $\mathscr{C}F_\alpha(\alpha\in I)$ 是 R 中的一族开集，令 $F=\bigcap\limits_{\alpha\in I}F_\alpha$，则

$$\mathscr{C}F=\bigcup_{\alpha\in I}\mathscr{C}F_\alpha$$

由定理4.1(1)知 $\mathscr{C}F$ 为开集，故 $F=\bigcap\limits_{\alpha\in I}F_\alpha$ 是闭集.

注意，无限个闭集的并可能不是闭集，例如 $F_n=\left[\frac{1}{n},1\right]$，$n=1,2,3,\cdots$，$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}F_n=(0,1]$不是闭集.

定义4.3 设 $E\subset R$，$a\in R$，若 a 的任一邻域中均有 $E-\{a\}$中之点，则称 a 为 E 的**聚点**；$x\in E$，若存在 x 的邻域(α,β)，使$(\alpha,\beta)\cap(E-\{x\})=\varnothing$，则称 x 为 E 的**孤立点**；点集 E 的一切聚点所成之集称为 E 的**导集**，记为 E'；$E\cup E'$称作 E 的闭包，记为 $\overline{E}$.

显然，E 的聚点不一定属于 E，读者也容易证明下列条件等价：

1° a 是 E 的聚点，

2° 存在点列$\{a_n\}\subset E-\{a\}$，使 $a_n\to a$，

3° 存在 E 中一列互不相同的点 $\{a_n\}$，使 $a_n\to a$.

例1 设 $E=\left\{1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\right\}$，则原点是 E 的唯一聚点，且不属于 E；又闭区间$[0,1]$中每一点是$(0,1)$中有理点全体所成集的聚点.

定理4.3 设非空点集 $E\subset R$，则下列条件等价：

(1) E 为闭集，

(2) $E'\subset E$，

(3) $E=\overline{E}$.

证　(1)⇒(2) 设 E 为闭集,则 $\mathscr{C}E$ 为开集,任取 $a\in E'$,由聚点定义,a 的任一邻域中均有 E 中之点,故 $a\overline{\in}\mathscr{C}E$, 即 $E'\subset E$.

(2) ⇒(3) 显然成立.

(3) ⇒(1) 设 $\overline{E}=E$, 则 $E'\subset E$, $\mathscr{C}E'\supset\mathscr{C}E$. 任取 $x\in\mathscr{C}E$,则 $x\in\mathscr{C}E'$,这表示 $x\overline{\in}E$ 时,x 也不是 E 的聚点,故存在 x 的邻域 (α,β), 使$(\alpha,\beta)\cap(E-\{x\})=\varnothing$,即

$$x\in(\alpha,\beta)\subset\mathscr{C}E,$$

$\mathscr{C}E$ 为开集,这就证明了 E 为闭集.

定理4.4　设 $E\subset R$,则 E' 和 $\overline{E}$ 都是闭集.

证　任取 $x\in\mathscr{C}E'$,则 $x\overline{\in}E'$,故存在 x 的邻域(α,β),使(α,β)中不含 $E-\{x\}$的点,这就推出(α,β)中任一点均非 E 的聚点,故 $x\in(\alpha,\beta)\subset\mathscr{C}E'$,$x$ 为 $\mathscr{C}E'$的内点,$\mathscr{C}E'$为开集,从而 E'是闭集.

对于 $\overline{E}$,因为 $\overline{E}=E\cup E'$,只要证明 $\mathscr{C}\overline{E}=\mathscr{C}E\cap\mathscr{C}E'$为开集.任取 $x\in\mathscr{C}\overline{E}$, 则 $x\overline{\in}E$, 且 $x\overline{\in}E'$,则存在 x 的邻域(α,β),使$(\alpha,\beta)\cap(E-\{x\})=\varnothing$,从而$(\alpha,\beta)\subset\mathscr{C}E$,且$(\alpha,\beta)\subset\mathscr{C}E'$,因此$(\alpha,\beta)\subset\mathscr{C}\overline{E}$, $\mathscr{C}\overline{E}$ 为开集.

为了说明开集概念的重要性,这里我们举一个利用开集概念来刻划连续函数特征的命题

定理4.5　设 $f(x)$定义在 R 上,则 $f(x)$连续的充要条件是:对任一开集 G,其原象 $f^{-1}(G)$为开集.

证　必要性:设 $f(x)$在 R 上连续,G 为 R 中的任一开集,不妨设$f^{-1}(G)\neq\varnothing$,任取 $x_0\in f^{-1}(G)$, 这表示$f(x_0)\in G$,因为 G 是开集,故存在 $\varepsilon>0$,使$(f(x_0)-\varepsilon,f(x_0)+\varepsilon)\subset G$, 另一方面,由 $f(x)$的连续性,存在 $\delta>0$, 使 $x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$时,$f(x)\in(f(x_0)-\varepsilon,\ f(x_0)+\varepsilon)$, 因此, 当 $x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$时,$f(x)\in G$,即$(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset f^{-1}(G)$, 故 $f^{-1}(G)$为开集.

充分性:任取 $x_0\in R$ 和 $\varepsilon>0$,由条件知开区间$(f(x_0)-\varepsilon,$

$f(x_0)+\varepsilon)$的原象U是R中的开集，显然$x_0\in U$，故存在$\delta>0$，使$(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset U$，即$x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$时，$f(x)\in(f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon)$，故$f(x)$在$x_0$点连续.

读者还可以证明，$f(x)$在R上连续的充要条件是：任何闭集的原象是闭集.

关于n维欧几里得空间R^n中的点集，我们将在第九章距离空间中介绍.

4.2 R中开集的构造

我们知道R中任意个开区间的并集是开集，特别是，一族互不相交的非空开区间（根据本章§2例7，这族开区间至多可列个）$\{(a_\alpha,b_\alpha)\}$的并集$\bigcup\limits_{\alpha}(a_\alpha,b_\alpha)$是开集，本段将证明，这正是$R$上非空开集的一般形式.

定义4.4 设G为开集，如果开区间$(\alpha,\beta)\subset G$，而且端点α,β不属于G（或$\alpha=-\infty,\beta=+\infty$），则称$(\alpha,\beta)$为$G$的一个**构成区间**.

定理4.6 直线R上任一非空开集必可唯一地表示成至多可列个互不相交的构成区间的并.

证 设G是R上的一个非空开集，分以下三步来论证：

(1) G中任一点必含在一个构成区间中.

事实上，任取$x_0\in G$，记

$$A_{x_0}=\{(\alpha,\beta):x_0\in(\alpha,\beta)\subset G\},$$

显然A_{x_0}非空，令

$$\alpha_0=\inf\{\alpha:(\alpha,\beta)\in A_{x_0}\},\quad \beta_0=\sup\{\beta:(\alpha,\beta)\in A_{x_0}\},$$

我们证明$(\alpha_0,\ \beta_0)$是G的构成区间. 首先由α_0,β_0的定义显然有$(\alpha_0,\ \beta_0)\supset\bigcup\limits_{(\alpha,\beta)\in A_{x_0}}(\alpha,\beta)$，另一方面，任取$x\in(\alpha_0,\beta_0)$，不妨设$x\leqslant x_0$，由$\alpha_0$的定义，必有$(\alpha,\beta)\in A_{x_0}$，使$\alpha_0<\alpha<x$，所以$x\in(\alpha,\ x_0]$

$\subset(\alpha,\beta)$，$(\alpha_0,\beta_0)\subset\bigcup\limits_{(\alpha,\beta)\in A_{x_0}}(\alpha,\beta)$，类似地可讨论 $x>x_0$ 的情形，所以

$$(\alpha_0,\ \beta_0)=\bigcup_{(\alpha,\beta)\in A_{x_0}}(\alpha,\beta)\subset G.$$

再证 $\alpha_0\overline{\in}G$，$\beta_0\overline{\in}G$. 设不然，例如 $\alpha_0\in G$，则存在 $\delta>0$，使 $(\alpha_0-\delta,\alpha_0+\delta)\subset G$，从而 $(\alpha_0-\delta,\beta_0)\subset G$，$(\alpha_0-\delta,\beta_0)\in A_{x_0}$，这与 α_0 的定义相矛盾，故 $\alpha_0\overline{\in}G$，同理可证 $\beta_0\overline{\in}G$，这说明 (α_0,β_0) 是 G 的构成区间，$x_0\in(\alpha_0,\beta_0)$.

(2) G 的任意两个不同的构成区间必不相交，从而至多可列. 设 $(\alpha_1,\ \beta_1)$，(α_2,β_2) 是 G 的两个不同的构成区间，但相交，这时必有一个区间的端点在另一区间内，不妨设 $\alpha_1\in(\alpha_2,\beta_2)$，但 $(\alpha_2,\beta_2)\subset G$，这与 $\alpha_1\overline{\in}G$ 矛盾，故 (α_1,β_1) 和 (α_2,β_2) 不相交. 根据§2例7知 G 的构成区间至多可列，记为 $\{(\alpha_k,\beta_k)\}$，由 (1) 知 $G\subset\bigcup\limits_k(\alpha_k,\beta_k)$，再由构成区间的定义 $G\supset\bigcup\limits_k(\alpha_k,\beta_k)$，故 $G=\bigcup\limits_k(\alpha_k,\beta_k)$.

(3) 唯一性：设 $G=\bigcup\limits_k(\alpha_k',\beta_k')$，其中 (α_k',β_k') 彼此不相交，只要证明每个 (α_k',β_k') 必是由 (1) 得到的构成区间. 任取 $x_0\in(\alpha_k',\beta_k')$，据 (1) x_0 属于 G 的构成区间 $(\alpha_0,\ \beta_0)$，若 $(\alpha_k',\beta_k')\neq(\alpha_0,\ \beta_0)$，则必有 $\alpha_0\in G$ 或 $\beta_0\in G$，矛盾，所以 $(\alpha_k',\beta_k')=(\alpha_0,\beta_0)$.

我们已经看到，$\varnothing$ 和 R 既是开集，又是闭集，自然要问：R 中是否存在其它的既开又闭之集？利用开集 G 的构造定理可以证明这样的集合不存在.

例2 设 A 是 R 中的点集，A 是开集，且又是闭集，证明 $A=\varnothing$ 或者 $A=R$.

证 用反证法：设 $A\neq\varnothing$，$A\neq R$，由于 A 是开集，设 A 的构成区间全体是 $\{(\alpha_n,\ \beta_n)\}$，则 $A=\bigcup\limits_n(\alpha_n,\beta_n)$. 由于 $A\neq R$，这些构成区间的端点 $\{\alpha_n\}$，$\{\beta_n\}$ 中至少有一个是有限的，设为 α_1，则 $\alpha_1\overline{\in}A$，但由于 $(\alpha_1,\beta_1)\subset A$，显然 α_1 是 A 的聚点，$\alpha_1\in A'$，A 又是闭集，则 $A'\subset A$，从而必有 $\alpha_1\in A$，矛盾，所以 A 必是全直线.

例3 设 f 是$[a,b]$的连续函数,记

$$E=\{x:\ x\in[a,b],\ 存在\ t>x,\ 使\ f(t)>f(x)\},$$

证明 E 是开集.

证 不妨设 $E\neq\varnothing$,任取 $x_0\in E$,则存在 $t>x_0$,使$f(t)>f(x_0)$,因为 f 在 x_0点连续,故存在 $\delta>0$,使 $x_0+\delta<t$,$x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$时,$f(t)>f(x)$,于是$(x_0-\delta,\ x_0+\delta)\subset E$,$E$ 是开集.

4.3 康托集

为了讨论 R 中的一个重要点集(康托三分集),我们先介绍 g 进位小数. g 是任意取定的一个大于1的自然数,$\{t_k\}$是一列整数,$0\leqslant t_k\leqslant g-1$,$k=1,2,3,\cdots$,则称级数

$$x=\frac{t_1}{g}+\frac{t_2}{g^2}+\cdots+\frac{t_k}{g^k}+\cdots \tag{4.1}$$

为 x 的 g 进位小数,也可以记作

$$0.\ t_1t_2\cdots t_k\cdots\ .$$

由于$0\leqslant t_k\leqslant g-1$,而 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{g-1}{g^k}=1$,因此级数(4.1)是收敛的,且 $0\leqslant x\leqslant\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{t_k}{g^k}\leqslant 1$,若在(4.1)中从某一项起 t_k 全为0,则称作 g 进位有限小数,否则称作 g 进位无限小数. 对于$(0,1]$中任一实数 t 均可唯一地表成 g 进位无限小数(详见文献[9]),于是,如果记 A 为 g 进位无限小数全体,作$(0,1]\to A$ 的映射 φ 如下:对每个 $t\in(0,1]$,将 t 表成 g 进位无限小数$0.\ t_1t_2\cdots t_n\cdots$,并记为 $\varphi(t)$,则显然 φ 是$(0,1]\to A$ 上的一一映射,即$(0,1]\sim A$.

下面我们先给出康托集的构造:

将基本区间$[0,1]$三等分,除去中间的一个开区间

$$C_1=I_1^{(1)}=\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right),$$

将剩下的两个闭区间$\left[0,\ \dfrac{1}{3}\right]$,$\left[\dfrac{2}{3},1\right]$分别三等分,并除去中间的

两个长度为$\frac{1}{9}$的小区间

$$C_2 = I_1^{(2)} U I_2^{(2)} = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right),$$

剩下四个闭区间$\left[0,\frac{1}{9}\right]$，$\left[\frac{2}{9},\frac{3}{9}\right]$，$\left[\frac{6}{9},\frac{7}{9}\right]$，$\left[\frac{8}{9},1\right]$又分别三等分，且除去中间的开区间（共4个），如此继续下去（见图7.5），第n次除去2^{n-1}个长度为$\frac{1}{3^n}$的开区间$C_n = \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_k^{(n)}$.

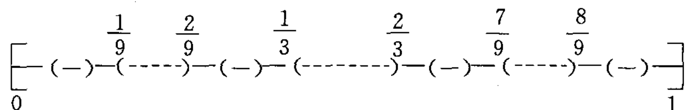


图 7.5

令$G_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$，其中$C_n = \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_k^{(n)}$称作第$n$级区间．$G_0$是开集，且每个小开区间是$G_0$的构成区间，则

$$P_0 = [0,1] - G_0$$

是一个闭集，称P_0为**康托三分集**.

下面讨论康托集P_0的性质：

（1）P_0是不含任何区间的闭集，这是因为对任一n，$P_0 \subset [0,1] - \bigcup_{i=1}^{n} C_i$，而$[0,1] - \bigcup_{i=1}^{n} C_i$中均是长度为$\frac{1}{3^n}$的小区间.

（2）$P_0' = P_0$，由于P_0是闭集，则$P_0' \subset P_0$，故只需证明$P_0 \subset P_0'$，即证明P_0无孤立点．设x_0为P_0的孤立点，因为0，1显然是P_0的聚点，故不妨设$x_0 \neq 0,1$，则在$(0,1)$中存在开区间(α_0, x_0)与(x_0, β_0)，其中均无P_0的点，即$(\alpha_0, x_0) \subset G_0$，$(x_0, \beta_0) \subset G_0$，且$x_0 \overline{\in} G_0$，从而可知$(\alpha_0, x_0)$，$(x_0, \beta_0)$将分别含于$G_0$的某两个构成区间$(\alpha, x_0)$与$(x_0, \beta)$中$(\alpha \leqslant \alpha_0,\ \beta \geqslant \beta_0)$，于是$x_0$为$G_0$的某两个构成区间的公共端点，但据$G_0$的作法，这是不可能的，所以$P_0$无孤立点.

（3）$\overline{\overline{P_0}} = \aleph$.

我们用$[0,1]$中数的二进位小数和三进位小数表示法来证明.

G_0的构成区间端点用三进位有限小数表示，例如

$$I_1^{(1)} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = (0.1, 0.2),$$

$$I_1^{(2)} = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) = (0.01, 0.02),$$

$$I_2^{(2)} = \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right) = (0.21, 0.22),$$

一般地，由归纳法可知，第 n 级开区间 $I_k^{(n)}(k=1,2,\cdots,2^{n-1})$形如

$$(0.a_1a_2\cdots a_{n-1}1,\ 0.a_1a_2\cdots a_{n-1}2),$$

其中 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$都取0或2，因此在这个区间中的实数用三进位小数表示必然形如$0.a_1a_2\cdots a_{n-1}1a_{n+1}\cdots$，即 $G_0=[0,1]-P_0$中的数用三进位表示时，至少有1位是1，我们记

$$A = \{0.a_1a_2a_3\cdots:\ a_n \text{ 为 } 0 \text{ 或 } 2,\ n = 1,2,3,\cdots\}$$

则 $A \subset P_0$. 作 $\varphi: A \to [0,1]$如下

$$x = 0.a_1a_2a_3\cdots \in A, \varphi(x) = 0.b_1b_2\cdots,$$

其中 $b_j=\frac{a_j}{2}(j=1,2,3,\cdots)$，[0,1]中的数用二进位小数来表示（$\frac{m}{2^n}$用二进位有限小数表示，$m=0,1,2,\cdots 2^n-1$），则 $\varphi(x)\in[0,1]$，显然 φ是 $A\to[0,1]$上的一一映射，所以$[0,1]\sim A\subset P_0$，又 P_0显然对等于[0,1]的一个子集，故据伯恩斯坦定理知 $\overline{\overline{P}}_0=\aleph$.

第八章　勒贝格测度

从本章开始，我们逐步介绍实变函数论的中心内容：勒贝格测度与勒贝格积分.

19世纪的数学家们已经认识到，古典的黎曼积分在理论和应用上有很大的局限性，为了解决分析中提出的许多问题，为了满足近代物理、概率论发展的需要，必须改造和推广原有的积分定义. 注意到黎曼积分与长度、面积、体积等度量有关，所以积分概念的推广，自然也首先要求对 R^n 中更一般的点集赋予一种度量，使之成为长度、面积或体积等概念的推广，这就产生了测度的概念. 现在，测度论的思想和方法已成为近代分析、概率论及其他某些学科必不可少的工具. 本教程实分析部分主要介绍直线 R 上的勒贝格测度和勒贝格积分.

§1　R 中点集的外测度、内测度

由于勒贝格积分是在"任意"集合上考虑的，故必须给予一般点集 E 有一个适当的度量(测度)；直线上点集 E 测度应该是区间长度的推广，故区间 (a,b)，$[a,b]$，$(a,b]$，$[a,b)$ 的测度自然都应该是 $b-a$，即区间的长度. 一般点集 E 的测度我们采用比较直观的构造方法来介绍. 为了说明这个构造性方法，回忆一个数学分析中，对一个固定的曲边梯形，当包含曲边梯形的阶梯形面积(大和)的下确界等于含于曲边梯形内的阶梯形面积(小和)的上确界时，我们规定这个曲边梯形是可求面积的，上述的共同确界就称为这个曲边梯形的面积.

以上的想法启发我们先定义点集的外测度和内测度，当某一点集的外测度等于其内测度时，这个公共数值就称为该点集的测度. 为此我们先介绍开集和有界闭集的测度的定义，并通过开集、闭集的测度来定义一般点集的外测度、内测度.

定义1.1 1° 设 G 为非空开集，则 $G=\bigcup\limits_{k}(\alpha_k,\beta_k)$，其中 (α_k,β_k) 互不相交，我们规定 G 的测度

$$mG=\sum_{k}(\beta_k-\alpha_k). \tag{1.1}$$

2° 设 F 为有界闭集，任取一个包含 F 的开区间 (a,b)，令 $G=(a,b)-F$，则 G 为有界开集，规定 F 的测度为

$$mF=b-a-mG. \tag{1.2}$$

可以证明闭集 F 的测度 mF 与区间 $(a,b)\supset F$ 的取法无关. 事实上，令 $\alpha=\inf\{x:x\in F\}$，$\beta=\sup\{x:x\in F\}$，则 $\alpha,\beta\in F$，置 $G=(a,b)-F$，$G^*=(\alpha,\beta)-F=[\alpha,\beta]-F$，因为 $a\notin G$，$\alpha\notin G$，故 (a,α) 为 G 的构成区间，同理 (β,b) 也是 G 的构成区间，且 $G=(a,\alpha)\cup(\beta,b)\cup G^*$，从而

$$mF=b-a-mG=\beta-\alpha-mG^*. \tag{1.3}$$

例1 Cantor 集 P_0 与相应的开集 G_0 之测度.

解 因为开集 $G_0=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}C_n$，其中 C_n 为 2^{n-1} 个互不相交的长度为 $\frac{1}{3^n}$ 的开区间，C_n 彼此也不相交，这些小区间的全体是 G_0 的构成区间，故

$$mG_0=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{3^n}=1,$$

$$mP_0=0.$$

定理1.1 (1) 单调性：设 G_1,G_2 是两个有界开集，且 $G_1\subset G_2$，则 $mG_1\leqslant mG_2$，

(2) 完全可加性：设有界开集 $G=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}G_k$，$G_k$ 为互不相交的开集，$k=1,2,\cdots$，则

$$mG = \sum_{k=1}^{\infty} mG_k,$$

(3) 半可加性：设有界开集 $G = \bigcup_k G_k$（有限或可列并），每个 G_k 为开集，则

$$mG \leqslant \sum_k mG_k.$$

证 (1) 设 G_1, G_2 的构成区间分别是 $\{\delta_k^{(1)}\}$ 与 $\{\delta_k^{(2)}\}$ $(k=1, 2, \cdots)$，则 $mG_1 = \sum_k m\delta_k^{(1)}$，$mG_2 = \sum_k m\delta_k^{(2)}$. 任取 $\varepsilon > 0$，存在自然数 N，使

$$mG_1 < \sum_{k=1}^{N} m\delta_k^{(1)} + \varepsilon.$$

由于 $G_1 \subset G_2$，读者可以证明每一个 $\delta_k^{(1)}$ 必含于某一个 $\delta_i^{(2)}$ 中，故存在自然数 M，使

$$mG_1 < \sum_{k=1}^{N} m\delta_k^{(1)} + \varepsilon \leqslant \sum_{i=1}^{M} m\delta_i^{(2)} + \varepsilon \leqslant mG_2 + \varepsilon,$$

因为 $\varepsilon > 0$ 是任意的，所以 $mG_1 \leqslant mG_2$.

(2) 设 $G_k = \bigcup_j \delta_j^{(k)}$，其中 $\delta_j^{(k)} = (\alpha_j^{(k)}, \beta_j^{(k)})$ 为开集 G_k 的构成区间，则

$$G = \bigcup_k G_k = \bigcup_k (\bigcup_j \delta_j^{(k)}) = \bigcup_{k,j} \delta_j^{(k)}.$$

对一切 k, j，$\delta_j^{(k)}$ 互不相交，$\delta_j^{(k)}$ 是 G 的构成区间，$mG = \sum_{k,j} m\delta_j^{(k)}$ $= \sum_k (\sum_j m\delta_j^{(k)}) = \sum_k mG_k$.

(3) 先设 $G = \Delta = (\alpha, \beta)$，$\Delta = \bigcup_k G_k$，不妨设 $\sum_k mG_k < \infty$，令 $G_k = \bigcup_j \delta_j^{(k)}$，$\{\delta_j^{(k)}\}_{j=1}^{\infty}$ 是 G_k 的构成区间，则对任给的 $\varepsilon > 0$，$[\alpha+\varepsilon, \beta-\varepsilon]$ 被开区间 $\delta_j^{(k)}$ $(j=1,2,\cdots,k=1,2,\cdots)$ 所覆盖，据有限覆盖定理，必存在有穷多个开区间 $\delta_{j_s}^{(k_s)}$ $(s=1,2,\cdots,n)$ 覆盖 $[\alpha+\varepsilon, \beta-\varepsilon]$，显然有

$$\beta - \alpha - 2\varepsilon \leqslant \sum_{s=1}^{n} m\delta_j^{(k_s)}, \leqslant \sum_{j,k} m\delta_j^{(k)}$$

$$=\sum_k\left(\sum_j m\delta_j^{(k)}\right)=\sum_k mG_k,$$

由于 $\varepsilon>0$是任意的,故

$$m\Delta=\beta-\alpha\leqslant\sum_k mG_k.$$

对一般的有界开集 $G=\bigcup_k G_k$, 也不妨设 $\sum_k mG_k<\infty$. 令$\{\Delta_i\}$是 G 的构成区间,则 $mG=\sum_i m\Delta_i$,但

$$\Delta_i=\Delta_i\cap\left(\bigcup_k G_k\right)=\bigcup_k(\Delta_i\cap G_k),$$

其中 $\Delta_i\cap G_k(k=1,2,\cdots)$为开集,则按第一步所证

$$m\Delta_i\leqslant\sum_k m(\Delta_i\cap G_k).$$

$$mG=\sum_i m\Delta_i\leqslant\sum_i\left(\sum_k m(\Delta_i\cap G_k)\right)$$

$$=\sum_k\left(\sum_i m(\Delta_i\cap G_k)\right),$$

另一方面,$G_k=G_k\cap(\bigcup_i\Delta_i)=\bigcup_i(\Delta_i\cap G_k)$,对固定的 k, $\Delta_i\cap G_k$ 互不相交($i=1,2,\cdots$),由(2)

$$mG_k=\sum_i m(\Delta_i\cap G_k),$$

故

$$mG\leqslant\sum_k mG_k.$$

注1 定理1.1中开集 $G(G_1,G_2)$可以为无界集,测度可以为$+\infty$.

定义1.2 设 E 是 R 中的任一点集,所有包含 E 的开集的测度的下确界称为 E 的**外测度**,并记为 m^*E:

$$m^*E=\inf\{mG:\text{开集 }G\supset E\}.\tag{1.4}$$

设 E 为 R 中的有界点集,所有含于 E 中的闭集的测度的上确界称为 E 的内测度,并记为 m_*E:

$$m_*E=\sup\{mF:\text{闭集 }F\subset E\}.\tag{1.5}$$

注2 利用定理1.1我们容易证明集合 E 的外测度

$$m^*E=\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}mI_i:\ E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i,\ I_i\text{ 是开区间}\right\}. \qquad (1.6)$$

定理1.2 (外测度的性质)

(1) 非负性：$0\leqslant m^*E\leqslant\infty$，$m^*(\varnothing)=0$，

(2) 单调性：设 $E_1\subset E_2$，则 $m^*E_1\leqslant m^*E_2$，

(3) 次可列可加性：$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}m^*E_i$.

证 (1)，(2)由外测度的定义显然可得.

(3) 对任给的 $\varepsilon>0$，由外测度的等价定义(1.6)式，对每个 i，都有开区间列$\{I_{ij}:\ j=1,2,\cdots\}$，使 $E_i\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}I_{ij}$，且

$$\sum_{j=1}^{\infty}mI_{ij}\leqslant m^*E_i+\frac{\varepsilon}{2^i},$$

(这里不妨设每个 $m^*E_i<+\infty$)于是$\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\subset\bigcup_{i,j}I_{i,j}$，且

$$\sum_{i,j=1}^{\infty}mI_{i,j}=\sum_i\sum_j mI_{ij}$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\left(m^*E_i+\frac{\varepsilon}{2^i}\right)=\sum_{i=1}^{\infty}m^*E_i+\varepsilon,$$

则

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)\leqslant\sum_{i,j=1}^{\infty}mI_{ij}\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}m^*E_i+\varepsilon.$$

由于 $\varepsilon>0$是任意的，所以

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}m^*E_i.$$

例2 设 E 为 R 中的有界点集，$m^*E>0$，则对任意的小于 m^*E的正数 c，均有 $E_1\subset E$，使 $m^*E_1=c$.

证 我们利用外测度的性质和数学分析中连续函数的介值定理来证明. 取$[a,b]\supset E$，定义$[a,b]$上的函数 f 如下：

$$f(x)=m^*(E\cap[a,x]),\ x\in[a,b].$$

显然,当 $x,y\in[a,b]$, $x\leqslant y$ 时, $E\cap[a,x]\subset E\cap[a,y]$,所以$f(x)\leqslant f(y)$, 即 f 是$[a,b]$上的单调增加函数. 今证 f 在$[a,b]$上连续. 任取 $x\in[a,b)$, $h>0$, 使 $x+h\in[a,b]$则

$$\begin{aligned}f(x+h)-f(x)&=m^*(E\cap[a,x+h])-m^*(E\cap[a,x])\\&\leqslant m^*(E\cap[x,x+h])\leqslant m^*([x,x+h])\\&=h.\end{aligned}$$

故 $f(x)$在点 x 处右连续,同理可证,对任一 $x\in(a,b]$, f 在 x 处左连续,所以 f 在$[a,b]$上连续,注意到$f(a)=0$, $f(b)=m^*E$, $f(a)<c<f(b)$,利用闭区间上连续函数的介值定理,可知存在 $\xi\in(a,b)$, 使 $f(\xi)=c$,即

$$m^*(E\cap[a,\xi])=c,$$

取集合 $E_1=E\cap[a,\xi]$,便有 $E_1\subset E$ 且 $m^*E_1=c$.

§2 勒贝格可测集及其性质

在内、外测度的基础上,可以引入可测集及其测度的概念.

定义2.3 设 E 为 R 中的有界点集,如果

$$m^*E=m_*E,$$

则称 E 为**勒贝格可测集**,简称 E 为**可测集**,这时 E 的外测度或内测度称为 E 的测度,并记为 mE. 又设 E 为 R 中的无界集,如果对任何有界开区间 $I=(-\alpha,\alpha)$, $E\cap I$ 都是可测的,则称 E 是可测的,其测度定义为

$$mE=\lim_{\alpha\to\infty}m\{E\cap(-\alpha,\alpha)\}\quad(\text{有限或}+\infty).$$

据定义2.3,易知开区间,闭区间,半闭半开区间均可测,且测度就是区间的长度.

应用这个定义虽然比较直观和自然,但它同时要使用内、外测度两个概念,而且有界集与无界集须分别处理,下面我们将利用形式上更为简化的一个等价定义(即卡拉皆屋独利条件)来讨论集合

的可测性.为此先证明内测度的等价定义.

定理2.1 设 $E\subset(a,b)$，$\mathscr{C}E$ 是 E 关(a,b)的补集，则

$$m_*E=b-a-m^*\mathscr{C}E. \tag{2.1}$$

证 对任意 $\varepsilon>0$，取闭集 $F\subset E$，使

$$mF>m_*E-\varepsilon, \tag{2.2}$$

F 关于(a,b)的补集 $\mathscr{C}F$ 为开集，且 $\mathscr{C}F\supset\mathscr{C}E$，故

$$m^*\mathscr{C}E\leqslant m\mathscr{C}F=b-a-mF, \tag{2.3}$$

于是由(2.2)，(2.3)得

$$m_*E<mF+\varepsilon\leqslant b-a-m^*\mathscr{C}E+\varepsilon.$$

令 $\varepsilon\to0$，得

$$m_*E\leqslant b-a-m^*\mathscr{C}E. \tag{2.4}$$

另一方面，取开集 $G\supset\mathscr{C}E$，使

$$mG<m^*\mathscr{C}E+\varepsilon,$$

不妨设开集 G 的构成区间有两个小区间(a,a')与(b',b)，其中 $a<a'<b'<b$，则 $H=\mathscr{C}G=[a',b']-G$ 为闭集，且 $H\subset E$，故

$$m_*E\geqslant mH=b-a-mG>b-a-m^*\mathscr{C}E-\varepsilon.$$

令 $\varepsilon\to0$，得

$$m_*E\geqslant b-a-m^*\mathscr{C}E. \tag{2.5}$$

(2.4)，(2.5)一起表明(2.1)成立.

从等式(2.1)可以看出，由于 E 与 $\mathscr{C}E$ 处于对称地位，等式

$$m_*\mathscr{C}E+m^*E=b-a$$

也成立，因而得到

$$m^*\mathscr{C}E-m_*\mathscr{C}E=m^*E-m_*E.$$

由此可知，关于基本区间(a,b)，集 E 与 $\mathscr{C}E$ 的可测性相同.

定理2.2 设 E 为 R 中的任一点集，若对任何集合 A，都有

$$m^*A=m^*(A\cap E)+m^*(A\cap\mathscr{C}E), \tag{2.6}$$

则 $m^*E=m_*E$，即 E 可测.

证 先设 $E\subset(a,b)$，并不妨设(a,b)为基本区间.取 $A=(a,$

b)，由条件(2.6)得

$$m^*E = b - a - m^*\mathscr{C}E.$$

据定理2.1，上式右边正是 E 的内测度 m_*E，故 $m^*E = m_*E$，E 可测.

设 E 为无界集，任取区间 $I_\alpha = (-\alpha, \alpha)$ $(\alpha > 0)$，考虑 $E_\alpha = E \cap I_\alpha$，此时可设基本区间为 I_α，由条件(2.6)，取 $A = (-\alpha, \alpha)$，类似可得

$$m^*E_\alpha = m_*E_\alpha,$$

故 E_α 可测($\forall\ \alpha > 0$)，从而 E 可测.

事实上，我们可以证明(2.6)也是 E 可测的一个必要条件(参见[6])，等式(2.6)称为 E 的**卡拉皆屋独利**(Cartheodory)**条件**.

例 设 $m^*E = 0$，则 E 可测，称 E 为勒贝格零集.

证 对任一点集 A，

$$m^*(A \cap E) + m^*(A \cap \mathscr{C}E) \leqslant m^*E + m^*A = m^*A,$$

另一方面， $A = (A \cap E) \cup (A \cap \mathscr{C}E)$，则

$$m^*A \leqslant m^*(A \cap E) + m^*(A \cap \mathscr{C}E),$$

故(2.6)成立，E 可测.

例2 设 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 为互不相交的可测集，A 为任一点集，则

$$m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)\right) = \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap E_i).$$

证 不妨设 $n = 2$，因为 E_1 可测，(2.6)式中用 $A \cap (E_1 \cup E_2)$ 代 A，得

$$\begin{aligned} m^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) &= m^*(A \cap (E_1 \cup E_2) \cap E_1) \\ &\quad + m^*(A \cap (E_1 \cup E_2) \cap \mathscr{C}E_1) \\ &= m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_2). \end{aligned}$$

定理2.3 (1) E 可测的充要条件是 $\mathscr{C}E$ 可测，

(2) 若 E_1, E_2 可测，则 $E_1 \cup E_2$，$E_1 \cap E_2$，$E_1 - E_2$ 均可测；又若 $E_1 \cap E_2 = \varnothing$，则

$$m(E_1 \cup E_2) = mE_1 + mE_2.$$

证 (1)不妨设 $E \subset (a,b)$,则由定理2.1后面的说明立即知 E 可测充要条件是 $\mathscr{C}E$ 可测.

(2) 任取点集 A,因为 E_2可测,所以

$$\begin{aligned} m^*(A \cap E_1) &= m^*(A \cap E_1 \cap E_2) + m^*(A \cap E_1 \cap \mathscr{C}E_2) \\ &= m^*(A \cap E_1 \cap E_2) + m^*(A \cap E_1 - E_2). \end{aligned}$$

其次,因 $A-(E_1 \cap E_2)=(A-E_1)\cup(A\cap E_1-E_2)$,则

$$m^*(A - (E_1 \cap E_2)) \leqslant m^*(A - E_1) + m^*(A \cap E_1 - E_2),$$

从而有

$$\begin{aligned} &m^*(A \cap E_1 \cap E_2) + m^*(A - (E_1 \cap E_2) \\ \leqslant &m^*(A \cap E_1 \cap E_2) + m^*(A - E_1) + m^*(A \cap E_1 - E_2) \\ = &m^*(A \cap E_1) + m^*(A - E_1) = m^*A, \end{aligned}$$

故

$$m^*(A) = m^*(A \cap E_1 \cap E_2) + m^*(A \cap \mathscr{C}(E_1 \cap E_2)),$$

即 $E_1 \cap E_2$可测.

利用等式

$$E_1 \cup E_2 = \mathscr{C}(\mathscr{C}(E_1 \cup E_2)) = \mathscr{C}(\mathscr{C}E_1 \cap \mathscr{C}E_2),$$

$$E_1 - E_2 = E_1 \cap \mathscr{C}E_2.$$

以及已证明的事实,立即知 $E_1 \cup E_2, E_1-E_2$均可测.

现设 $E_1 \cap E_2=\varnothing$,据例2,对任一点集 A,有

$$m^*(A \cap (E_1 \cup E_1)) = m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_2),$$

在上式中取 $A=R$, 则得

$$m^*(\bigcup_{i=1}^{2} E_i) = m^*E_1 + m^*E_2.$$

因为 $E_1, E_2, E_1 \cup E_2$均可测,所以

$$m(E_1 \cup E_2) = mE_1 + mE_2.$$

注 由定理2.3可知,有限个可测集的交与并也是可测的,且当 $E_k(k=1,2,\cdots,n)$为互不相交的可测集时, $m(\bigcup_{k=1}^{n} E_k) =$

$\sum_{k=1}^{n} mE_k$.

定理2.4 设每个 E_i 都可测($i=1,2,3,\cdots$)，则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ 和 $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$ 均可测，且

$$m(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} mE_i,$$

特别地，当 $E_i \cap E_j = \varnothing$($i \neq j$ 时)，有

$$m(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} mE_i.$$

证 显然有

$$\begin{aligned} E &= \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \\ &= E_1 \cup (E_2 - E_1) \cup (E_3 - (E_1 \cup E_2)) \cup \\ &\quad \cdots \cup [E_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} E_i] \cup \cdots \end{aligned}$$

上式是右边各项彼此不相交，且据定理2.3知每一项均可测，所以要证明 $E=\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ 可测，不妨设诸 E_i 互不相交. 设 A 是 R 中任一点集，由外测度的次可加性

$$m^* A \leqslant m^*(A \cap E) + m^*(A \cap \mathscr{C}E).$$

今证相反不等式成立. 对任何自然数 n，由定理2.3，$\bigcup_{i=1}^{n} E_i$ 可测，故有

$$\begin{aligned} m^* A &= m^*(A \cap (\bigcup_{i=1}^{n} E_i)) + m^*(A \cap \mathscr{C}(\bigcup_{i=1}^{n} E_i)) \\ &\geqslant m^*(A \cap (\bigcup_{i=1}^{n} E_i)) + m^*(A \cap \mathscr{C}E) \\ &= \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap E_i) + m^*(A \cap \mathscr{C}E). \end{aligned}$$

令 $n \to \infty$，得

$$m^* A \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A \cap E_i) + m^*(A \cap \mathscr{C}E).$$

再利用外测度的次可加性，得

$$m^*A \geqslant m^*(A \cap E) + m^*(A \cap \mathscr{C}E),$$

故 $m^*A=m^*(A\cap E)+m^*(A\cap\mathscr{C}E)$，$E=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i$ 可测.

$$m(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i) = m^*(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}mE_i$$

利用外测度单调性及定理2.3，得

$$m(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i) \geqslant m(\bigcup_{i=1}^{n}E_i) = \sum_{i=1}^{n}mE_i,$$

令 $n\to\infty$，有

$$m(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i) \geqslant \sum_{i=1}^{\infty}mE_i,$$

故

$$m(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i) = \sum_{i=1}^{\infty}mE_i.$$

最后利用 $\mathscr{C}(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}E_i)=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\mathscr{C}E_i$，立即知 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}E_i$ 也可测.

定理2.5 （勒贝格测度的性质）

（1）非负性：对任何可测集 E，$mE\geqslant 0$，$m(\varnothing)=0$.

（2）单调性：设 E_1,E_2 可测，且 $E_1\subset E_2$，则

$$mE_1 \leqslant mE_2.$$

又若 $mE_1<\infty$，则

$$m(E_2-E_1) = mE_2 - mE_1.$$

（3）次可列可加性和可列可加性：设每个 E_i 可测（$i=1,2,3,\cdots$），则

$$m(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}mE_i.$$

又若 E_i 互不相交，则

$$m(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i) = \sum_{i=1}^{\infty}mE_i.$$

（4）设 $E_n(n=1,2,3,\cdots)$ 是一列可测集，且 $E_1\subset E_2\subset\cdots$，则

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)=\lim_{n\to\infty}mE_n.$$

(5) 设 $E_n(n=1,2,3,\cdots)$是一列可测集,$E_1\supset E_2\supset\cdots$,且至少有一个 E_n，使得 $mE_n<\infty$,则

$$m\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}E_i\right)=\lim_{n\to\infty}mE_n.$$

证 (1) 由外测度、内测度的定义立即可得.

(2) 因为 E_1,E_2可测,则 E_2-E_1可测,$E_2=(E_2-E_1)\cup E_1$,$(E_2-E_1)\cap E_1=\varnothing$,故 $mE_2=m(E_2-E_1)+mE_1)\geqslant mE_1$.

若 $mE_1<\infty$,则由等式 $mE_2=m(E_2-E_1)+mE_1$可得

$$m(E_2-E_1)=mE_2-mE_1.$$

(3) 就是定理2.4的结论.

(4) 因为 $E_1\subset E_2\subset\cdots$,记 $F_1=E_1$，$F_n=E_n-E_{n-1}$ $(n=2,3,\cdots)$,则$\{F_n\}$是一列互不相交的可测集,且$\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i=\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i$，则

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)=m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}mF_i$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}mF_i=\lim_{n\to\infty}mE_n.$$

(5) 不妨设 $mE_1<\infty$，因为 $E_1\supset E_2\supset\cdots$,记 $F_n=E_1-E_n(n=1,2,\cdots)$,这时$\{F_n\}$是一列渐张可测集,而且

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i=E_1-\bigcap_{i=1}^{\infty}E_i,$$

由(4)得到

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i\right)=\lim_{n\to\infty}mF_n.$$

由于 $E_1=F_n\cup E_n$，$F_n\cap E_n=\varnothing$,则 $mE_1=mF_n+mE_n$，$mF_n=mE_1-mE_n$,另一方面据(3) 有 $mE_1=m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i\right)+m\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}E_i\right)$，所以

$$m\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}E_i\right)=mE_1-m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i\right)=mE_1-\lim_{n\to\infty}mF_n$$

$$=mE_1-\lim_{n\to\infty}(mE_1-mE_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} mE_n.$$

这里第一个等号与第四个等号利用了条件 $mE_1<\infty$.

定理2.5(5)的证明中,我们用到了条件 $mE_1<\infty$,它实际上相当于至少有一个 E_n,满足 $mE_n<\infty$(因为 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} E_i=\bigcap\limits_{i=n}^{\infty} E_i$),这个条件是不可少的,例如,取

$$E_n = (n,\infty),\ n = 1,2,\cdots,$$

则 $E_1\supset E_2\supset\cdots,\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} E_i=\varnothing$,但

$$mE_n = \infty,\ n = 1,2,\cdots,$$

$$m(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i) = m(\varnothing) = 0,$$

故

$$m(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i) \neq \lim_{n\to\infty} mE_n.$$

例3 设 E 是 R 中的可列点集,则 E 可测,且 $mE=0$.

证 对 R 中的每个单点集 $\{x\}$,显然有 $m^*\{x\}=m_*\{x\}=0$,故单点集 $\{x\}$ 可测,且 $m\{x\}=0$,利用可列可加性,立即知 E 可测,且 $mE=0$.

例4 设在$[0,1]$中有勒贝格可测集 $E_1,E_2,\cdots,E_n$ 满足条件 $\sum\limits_{i=1}^{n} mE_i > n-1$,则交集 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} E_i$ 必具有正测度.

证 由 De Morgan 法则

$$\bigcap_{i=1}^{n} E_i = [0,1] - \bigcup_{i=1}^{n}([0,1] - E_i),$$

则

$$\begin{aligned} m(\bigcap_{i=1}^{n} E_i) &= 1 - m(\bigcup_{i=1}^{n}([0,1] - E_i)) \\ &\geqslant 1 - \sum_{i=1}^{n}(1 - mE_i) \\ &= 1 - n + \sum_{i=1}^{n} mE_i \end{aligned}$$

$$>1-n+n-1=0.$$

例5 设 E 是 R 中具有正测度的可测集，则 E 中必有两点 x 与 y，使 $|y-x|$ 是一无理数.

证 任取 $x\in E$，作集合

$$E_1=\{y-x:y\in E\}.$$

由于 $mE>0$，则 E 是不可列的，又显然 E_1 的势等于 E 的势，故 E_1 不可列，从而 E_1 中必含有一无理数，即有 $x,y\in E$，使 $y-x$ 是一无理数，此时，$|y-x|$ 当然也是无理数.

§3 勒贝格可测集类

上一节中，我们给出了勒贝格可测集概念，并讨论了可测集和测度的一些性质，还指出区间 I 是可测的，其测度 mI 就是区间的长度，自然要问：开集、闭集是否可测？若可测，其测度与§1中规定的测度是否一致？一般常见集合中有哪些是可测的呢？

3.1 开集、闭集的可测性

定理3.1 开集和闭集均是可测的，且其测度与§1中规定的测度相同.

证 因为对任一开集 G，G 可表成可列个互不相交的开区间 $I_k=(\alpha_k,\beta_k)$ 之并($k=1,2,3,\cdots$)，每个 I_k 可测，$mI_k=\beta_k-\alpha_k$，据测度的可列可加性，G 必可测，且 $mG=\sum\limits_{k=1}^{\infty}mI_k=\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\beta_k-\alpha_k)$.

设闭集 $F\subset(a,b)$，取 (a,b) 为基本区间，则 $(a,b)=F\cup\mathscr{C}F$，$\mathscr{C}F$ 为开集，必可测，所以 $F=(a,b)-\mathscr{C}F$ 也可测，且 $b-a=mF+m\mathscr{C}F$，即

$$mF=b-a-m\mathscr{C}F.$$

从而任一闭集 $F\subset R$ 也是可测的.

我们称可列个开集 $\{G_n\}$ 之交 $G=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G_n$ 为 G_δ 型集，可列个闭

集$\{F_n\}$之并 $F=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$ 为 F_σ 型集，显然 G_δ 型集和 F_σ 型集均可测.

定理3.2 点集 E 可测的充要条件是：对任一正数 ε，存在开集 G 和闭集 F，使得 $G\supset E\supset F$，且

$$m(G-F)<\varepsilon.$$

证 必要性：先设 E 为有界可测集，$mE=m^*E$，按外测度的定义，对任意的 $\varepsilon>0$，存在开集 $G\supset E$，使

$$mG<m^*E+\frac{\varepsilon}{2},$$

故 $m(G-E)=mG-mE<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

若 E 为无界可测集，令 $E_k=E\cap(-k,k)$ $(k=1,2,\cdots)$，E_k 为有界可测集，且 $E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$，对任意的 $\varepsilon>0$，存在开集 $G_k\supset E_k$，使

$$m(G_k-E_k)<\frac{\varepsilon}{2^{k+1}},$$

作开集 $G=\bigcup_{k=1}^{\infty}G_k$，$G\supset E$，易知

$$G-E\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}(G_k-E_k),$$

$$m(G-E)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}m(G_k-E_k)<\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}=\frac{\varepsilon}{2}.$$

当 E 可测时，$\mathscr{C}E$ 也可测，由上面所证，对 $\varepsilon>0$，存在开集 $G\supset\mathscr{C}E$，使

$$m(G-\mathscr{C}E)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

现在令 $F=\mathscr{C}G$，则 F 是闭集，$F\subset E$，且容易证明 $E-F=G-\mathscr{C}E$，所以

$$m(E-F)<\frac{\varepsilon}{2},$$

于是，由 $G-F=(G-E)\cup(E-F)$，得

$$m(G-F)\leqslant m(G-E)+m(E-F)<\varepsilon.$$

充分性：取 $\varepsilon=\frac{1}{n}$，由条件存在开集 G_n 和闭集 F_n，使 $G_n\supset E\supset F_n$，且

$$m(G_n-F_n)<\frac{1}{n}.$$

作集合

$$\widetilde{G}=\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n,\ \widetilde{F}=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n.$$

则 $\widetilde{G}$ 和 $\widetilde{F}$ 均可测，且 $\widetilde{G}\supset E\supset\widetilde{F}$，但因为 $\widetilde{G}\subset G_n$，$\widetilde{F}\supset F_n$，所以对任一自然数 n，$\widetilde{G}-\widetilde{F}\subset G_n-F_n$，从而

$$m(\widetilde{G}-\widetilde{F})\leqslant m(G_n-F_n)<\frac{1}{n},\ n=1,2,\cdots.$$

令 $n\to\infty$，即得 $m(\widetilde{G}-\widetilde{F})=0$，$\widetilde{G}-\widetilde{F}$ 是零集. 因为

$$\widetilde{G}-E\subset\widetilde{G}-\widetilde{F},$$

则 $\widetilde{G}-E$ 也是零集，由上一节例1知 $\widetilde{G}-E$ 可测，故 $E=\widetilde{G}-(\widetilde{G}-E)$ 也是可测的.

3.2 波雷尔集

为了介绍波雷尔集的概念，这里先引入一个重要的集类：σ 代数.

定义3.1 设 $\mathscr{A}$ 是由集合 X 的某些子集所组成的集类，如果

(1) $X\in\mathscr{A}$.

(2) 若 $A,B\in\mathscr{A}$，则 $A-B$，$A\cup B\in\mathscr{A}$，

则称 $\mathscr{A}$ 为 X 的一个**代数**. 又若成立

(3) 若 $E_i\in\mathscr{A}$，$i=1,2,3,\cdots$，则

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\in\mathscr{A},$$

则称 $\mathscr{A}$ 是 X 上的一个 **σ 代数**.

显然 X 的子集全体组成的集类是一个 σ 代数. 设 $\mathscr{A}$ 是 X 上的一个 σ 代数，若 $E\in\mathscr{A}$，则 $\mathscr{C}E=X-E\in\mathscr{A}$，若 $E_i\in\mathscr{A}$，$i=1,2,3,\cdots$，则 $\bigcap_{i=1}^{\infty}E_i=\mathscr{C}(\bigcup_{i=1}^{\infty}\mathscr{C}E_i)\in\mathscr{A}$. 由此可知，一个 σ 代数关于

"可列并"、"可列交"及"差"运算(包括"补"运算)是封闭的非空集类.

定理3.3 设 X 是一个集合,$\mathscr{F}$ 是 X 的子集族,则存在一个 X 上的包含 $\mathscr{F}$ 的最小 σ 代数,称作由 $\mathscr{F}$ 生成的 σ 代数,通常记作 $\sigma(\mathscr{F})$.

证 首先,由于 X 的子集全体是一个 σ 代数,它当然包含 $\mathscr{F}$,令 $\mathscr{A}$ 为所有包含 $\mathscr{F}$ 的 σ 代数的交集,由定义3.1知 $\mathscr{A}$ 仍然是一个 σ 代数,显然,$\mathscr{A}$ 是唯一的包含 $\mathscr{F}$ 的最小 σ 代数.

定义3.2 由 R^n 中开集全体构成的集类所生成的 σ 代数称为波雷尔 σ 代数,这个 σ 代数中的元素称为**波雷尔集**.

显然 R 中开集、闭集、G_δ 型集和 F_σ 型集均为波雷尔集.

定理3.4 R 中勒贝格可测集全体组成一个 σ 代数.

证 由§2定理2.3,定理2.4,可测集类对于"差"运算和"可列并"运算封闭,又 R 是可测的,故可测集全体是一个 σ 代数.

定理3.5 R 中任何波雷尔集必是勒贝格可测的.

证 由定义3.2可知波雷尔 σ 代数是包含所有开集的最小 σ 代数,而勒贝格可测集类又是包含开集的一个 σ 代数,故波雷尔 σ 代数是勒贝格可测集类的一个子集,即任何波雷尔集必勒贝格可测.

*3.3 勒贝格不可测集

通常我们遇到的点集都是可测的,因而自然要问是否存在不可测集?下面将利用勒贝格测度的平移不变性,在策默罗选择公理的基础上来构造一个不可测集的例子.

先考察集合的平移变换.设 h 为实数,E 为 R 的一个子集,令平移变换 $T_h: x \to x+h$,并记

$$T_hE = \{T_hx; x \in E\}.$$

显然,当 $E=(\alpha,\beta)$ 时,$T_hE=(\alpha+h,\ \beta+h)$,$mT_hE=mE$,由此可知当 E 为开集 G 时,亦有 $m(T_hG)=mG$.据外测度的定义容

易证明，对任意点集 E，有

$$m^*(T_hE)=m^*E.$$

因此点集 E 的可测性也是平移不变的. 事实上，由定理3.2证明知，存在 G_δ 型集 $\widetilde{G}\supset E$，使 $m(\widetilde{G}-E)=0$，设 $\widetilde{G}=\bigcap_{k=1}^{\infty}G_k$，其中 G_k 都是开集，T_hG_k 仍为开集，$\bigcap_{k=1}^{\infty}T_hG_h$ 是 G_δ 型集，由外测度的平移不变性知，$T_h(\widetilde{G}-E)$ 仍然是零集. 由 $E=\widetilde{G}-(\widetilde{G}-E)$ 可得

$$T_hE=T_h\widetilde{G}-T_h(\widetilde{G}-E)$$

$$=\bigcap_{k=1}^{\infty}T_hG_k-T_h(\widetilde{G}-E),$$

故 T_hE 是可测的，且 $mT_hE=mE$.

设 $\{r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots\}$ 是 $[-1,1]$ 中的有理数，构造 E，使 $E_n=T_{r_n}E$ 满足下面两条性质：

(1) $\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\supset[0,1]$，

(2) E_n 互不相交，且 $\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\supset[-1,2]$，

则 E 一定不是勒贝格可测的.

因为如果 E 可测，则 $E_n=T_{r_n}E$ 也可测，且 $mE_n=mE$，由性质(1)，(2)立即知

$$1\leqslant m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}mE_n\leqslant 3,$$

由 $\sum_{n=1}^{\infty}mE_n\leqslant 3$ 推出 $mE=mE_n=0$，由 $\sum_{n=1}^{\infty}mE_n\geqslant 1$ 可得到 $mE_n>0$，矛盾，故 E 必定不可测.

下面我们来构造满足(1)，(2)的集合 E. 设 Q 是 R 中有理数全体，将 $[0,1]$ 中的点分类如下：当 $x-y\in Q$ 时，称 x 等价于 y，记作 $x\sim y$，x,y 属于同一类，$x\in[0,1]$，记 $E_x=\{z\in[0,1]:z\sim x\}$，这样，利用这个"$\sim$"关系就把 $[0,1]$ 中的点分成等价类，得到一非空集类 $\{E_x\}$，其中两个不同的等价类 E_x，E_y（即 E_x,E_y 中的元素彼此不等价）一定互不相交，据策墨罗选择公理，可从每一个等价

类中取一点构成一集合 E，我们证明 $E_n=T_{r_n}E$ 满足条件(1)，(2)．

(1) 任取 $\xi\in[0,1]$，$E_\xi\cap E$ 为单元素集，设为 $\{\eta\}$，则 $\eta\in E$，$\eta-\xi$ 是有理数，由于 $\xi,\eta\in[0,1]$，所以 $\xi-\eta\in[-1,1]$，故存在 n_0，使 $\xi-\eta=r_{n_0}$，则 $\xi=\eta+r_{n_0}\in Tr_{n_0}E=E_{n_0}$．因为 ξ 是 $[0,1]$ 中任一点，故 $[0,1]\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$．

(2) 证明 E_n 互不相交，设存在 $l\neq n$，使 $\xi\in E_l\cap E_n$，则 $\xi+\xi_1+r_l$，$\xi=\xi_2+r_n$，其中 ξ_1，$\xi_2\in E$，$\xi_1\sim\xi_2$．由于 $r_l\neq r_n$，则 $\xi_1\neq\xi_2$，再由 E 的作法，E 中两个不同元素必不等价，这就产生了矛盾，故 E_n 互不相交．此外，由 $E\subset[0,1]$，$r_n\in[-1,1]$ 立即知 $E_n\subset[-1,2]$，所以 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n\subset[-1,2]$．

第九章　可测函数

本章引进一个新的函数类——可测函数类，它与可测集有密切的关系，也是实分析中的主要内容勒贝格积分的基本对象.

§1　可测函数及其基本性质

1.1　可测函数的定义

设 E 是 R 的一个可测子集，$f(x)$是定义在 E 上的实函数(其值可以为无穷大). 对任一实数 α，记号

$$E(f>\alpha)=\{x: x\in E, f(x)\in(\alpha, +\infty]\}$$
$$=f^{-1}((\alpha, +\infty]).$$

类似地，可以了解

$$E(f\geqslant\alpha), E(f<\alpha), E(f\leqslant\alpha), E(\alpha<f<\beta)$$

等记号的意义.

今后凡提到函数均是指 R 中某点集 E 上的实值函数，且其值可以取$+\infty$或$-\infty$.

定义1.1　设 $f(x)$是定义在可测集 E 上的函数，如果对每一个实数 α，$E(f>\alpha)$都(勒贝格)可测，则称 f 是 E 上的(勒贝格)**可测函数**；如果对每一个实数 α，$E(f>\alpha)$是 Borel 可测集，则称 f 为**波雷尔可测函数**.

注1　读者容易证明：

(1) 设 $f(x)$是可测集 E 上的可测函数，$E_1\subset E$ 可测，则 $f(x)$

也是 E_1 上的可测函数，

(2) 设 $E=\bigcup_{i=1}^{n}E_i$，每个 E_i 可测，$f(x)$ 在每个 E_i 上可测，则 $f(x)$ 在 E 上也可测.

注2 设 $f(x)$ 是定义在可测集 E 上的函数，利用下列等式：

$$E(f\geqslant\alpha)=\bigcap_{n=1}^{\infty}E\left(f>\alpha-\frac{1}{n}\right),$$

$$E(f<\alpha)=E-E(f\geqslant\alpha),$$

$$E(f\leqslant\alpha)=\bigcap_{n=1}^{\infty}E\left(f<\alpha+\frac{1}{n}\right),$$

$$E(f>\alpha)=E-E(f\leqslant\alpha).$$

立即知下列条件等价：

(1) $f(x)$ 在 E 上可测，

(2) 对任何实数 α，$E(f\geqslant\alpha)$ 可测，

(3) 对任何实数 α，$E(f<\alpha)$ 可测，

(4) 对任何实数 α，$E(f\leqslant\alpha)$ 可测.

例1 设集合 A 可测，则特征函数

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, & 若\ x\in A,\\ 0, & 若\ \overline{\in}\ A,\end{cases}$$

必可测.

这是因为当 $\alpha\geqslant1$ 时，$E(f>\alpha)=\varnothing$，$0\leqslant\alpha<1$ 时，$E(f>\alpha)=A$，$\alpha<0$ 时，$E(f>\alpha)=R$ 均可测.

例2 设 $f(x)$ 的定义域 E 可以分为有限个互不相交的可测集 $E_1,E_2,\cdots,E_m$，$E=\bigcup_{i=1}^{m}E_i$，$x\in E_i$ 时，$f(x)=C_i$（常数）$(i=1,2,\cdots,m)$，则称 f 为 E 上的简单函数，可记

$$f(x)=\sum_{i=1}^{m}C_i\chi_{E_i}(x).$$

由定义1.1易知简单函数必可测，事实上，不妨设 $C_1<C_2<\cdots<C_m$.

$$E(f>\alpha)=\begin{cases}\varnothing, & \alpha \geqslant C_m, \\ E_m, & C_{m-1} \leqslant \alpha < C_m, \\ \cdots\cdots & \\ \bigcup_{i=2}^{m} E_i, & C_1 \leqslant \alpha < C_2, \\ \cdots\cdots & \\ E, & \alpha < C_1.\end{cases}$$

均可测,故 f 可测.

例3 区间$[a,b]$上的单调函数是可测函数.

这是因为 $E=[a,b]$, 对每一个实数 α, $E(f>\alpha)$一定是$[a,b]$的某一个子区间或空集,从而必是可测集.

例4 R 上的连续函数 $f(x)$必可测.

我们知道 $f(x)$是 R 上连续函数的充要条件是:对任一开集 G, $f^{-1}(G)$为开集,所以对任一实数 α,

$$E(f>\alpha)=\bigcup_{k=1}^{\infty} E(\alpha<f<\alpha+k)=\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}((\alpha,\alpha+k))$$

可测,故 f 可测.

下面讨论可测集 E 上连续函数的可测性.

定义1.2 设 $f(x)$是定义在可测集 E 上的函数, $x_0\in E$, 如果 $y_0=f(x_0)$有限,且对 y_0的任一邻域 $V(y_0)$, 存在 x_0的某个邻域 $U(x_0)$, 使得 $x\in E\cap U(x_0)$时,$f(x)\in V(y_0)$, 则称 $f(x)$在点 x_0 连续,如果 $f(x)$在 E 中每一点连续,则称 $f(x)$在 E 上连续.

显然,$f(x)$在 E 的孤立点都是连续的.

例5 可测集 E 上的连续函数是可测函数.

证 任取实数 α,设 $x_0\in E(f>\alpha)$, 则 $x_0\in E$,且 $f(x_0)\in(\alpha,+\infty)$, 由 f 的连续性,存在 x_0的领域 $U(x_0)$,使得 $x\in E\cap U(x_0)$时,$f(x)\in(\alpha,+\infty)$,即

$$E\cap U(x_0)\subset E(f>\alpha).$$

令

$$G=\bigcup\{U(x):x\in E(f>\alpha)\},$$

G 是开集，必可测. 由 G 的作法知

$$E(f>\alpha)\subset G\cap E\subset\bigcup\{U(x)\cap E:x\in E(f>\alpha)\}$$
$$\subset E(f>\alpha)$$

所以

$$E(f>\alpha)=G\cap E,$$

必可测，从而 f 是可测函数.

1.2 可测函数的基本性质

在介绍可测函数的基本性质之前，先介绍一个在测度和积分理论中的重要概念："几乎处处"概念.

由于零集的任何子集仍是零集，故可测，从而定义在零测度集 E 上的函数必是可测的，这样，按照定义1.1之后的附注1，如果改变零测度集上函数 $f(x)$ 的值，不影响 $f(x)$ 的可测性. 以后还将看到，这样的改变不影响函数的可积性和积分结果.

定义1.3 （几乎处处概念） 如果命题（或性质）S，在集合 E 上除了某个零测度子集外处处成立，则称命题 S 在 E 上**几乎处处成立**，记为 S，a.e.

例如两个函数 f 与 g 在 E 上几乎处处相等，简记为 $f=g$，a.e. 或 $f\sim g$.

又如"$\{f_n\}$ 几乎处处收敛于 f"就是指除去一个零测度集 E_0 外，$f_n(x)$ 收敛于 $f(x)$，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$，a.e. 或 $f_n\xrightarrow{\text{a.e.}}f$.

定理1.1 （1）设 $\{f_n(x)\}$ 是可测集 E 上的可测函数序列（或有限个），则 $\sup\limits_n f_n(x)$，$\inf\limits_n f_n(x)$ 以及 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}f_n(x)$，$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}f_n(x)$ 均可测，

（2）设 $f(x)$ 是可测集 E 上的可测函数，令

$$f_+(x)=\begin{cases}f(x), & 若\ f(x)\geqslant 0\\ 0, & 若\ f(x)<0,\end{cases}$$

$$f_-(x)=\begin{cases}-f(x), & 若\ f(x)\leqslant 0\\ 0, & 若\ f(x)>0,\end{cases}$$

则 $f_+(x)$，$f_-(x)$，$|f(x)|$均可测.

证 (1) 任取实数 α,先证明等式

$$E(\sup_n f_n > \alpha) = \bigcup_n E(f_n > \alpha) \tag{1.1}$$

成立.事实上,若 $x_0 \in E(\sup_n f_n > \alpha)$，则$\sup_n \{f_n(x_0)\} > \alpha$,于是存在 n_0,使 $f_{n_0}(x_0) > \alpha$,即 $x_0 \in E(f_{n_0} > \alpha)$,故

$$E(\sup_n f_n > \alpha) \subset \bigcup_n E(f_n > \alpha).$$

相反包含关系显然成立,故(1.1)成立.

因为每个 $E(f_n > \alpha)$可测,所以 $E(\sup_n f_n > \alpha)$可测,即$\sup_n f_n$ 是可测函数.

同理可证

$$E(\inf_n f_n < \alpha) = \bigcup_n E(f_n < \alpha),$$

故$\inf_n f_n$ 也可测.

根据上、下极限的定义,

$$\overline{\lim_n} f_n(x) = \inf_k (\sup_{n \geqslant k} f_n(x)),\ \underline{\lim_n} f_n(x) = \sup_k (\inf_{n \geqslant k} f_n(x)),$$

立即知$\overline{\lim_n} f_n(x)$和$\underline{\lim_n} f_n(x)$均可测.

(2) 因为 $f_+(x) = \sup\{f(x), 0\}$，$f_-(x) = \sup\{-f(x), 0\}$，$|f(x)| = \sup\{f(x), -f(x)\}$，而 $f(x)$可测可推知$-f(x)$可测,故由(1)立即得 $f_+(x)$，$f_-(x)$和$|f(x)|$的可测性.

定理1.2 设$\{f_n(x)\}$是可测集 E 上的可测函数序列,$f_n(x) \to f(x)$, a.e.,则 $f(x)$在 E 上也可测.

证 令 $g(x) = \overline{\lim_n} f_n(x)$，则 $g(x) = f(x)$, a.e.,由定理1.1知 $g(x)$可测,故 $f(x)$也可测.

定理1.3 设 $f(x)$是可测集 E 上的非负可测函数,则存在一列非负递坛的简单函数列 $\varphi_n(x)$:

$$0 \leqslant \varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x) \leqslant \cdots \leqslant \varphi_n(x) \leqslant \cdots,$$

使$\lim_{n \to \infty} \varphi_n(x) = f(x)$在 E 上处处成立.

证 对每一个自然数 n,将$[0, n]$分成 $n \cdot 2^n$ 等分,令

$$\varphi_n(x)=\begin{cases}\dfrac{k-1}{2^n}, & \text{当}\dfrac{k-1}{2^n}\leqslant f(x)<\dfrac{k}{2^n},\ k=1,2,\cdots,n\cdot 2^n,\\ n, & \text{当 } f(x)\geqslant n,\end{cases}$$

则 $\varphi_n(x)$是 E 上的非负简单函数序列,且不难证明 $\varphi_n(x)\leqslant\varphi_{n+1}(x)$ $(n=1,2,3,\cdots)$,下面,我们来证明$\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)=f(x)$,令

$$A_{n,k}=\left\{x\in E: \frac{k-1}{2^n}\leqslant f(x)<\frac{k}{2^n}\right\},\ k=1,2,\cdots,n\cdot 2^n,$$

$$B_n=\{x\in E, f(x)\geqslant n\},$$

则

$$\varphi_n(x)=\sum_{k=1}^{n\cdot 2^n}\frac{k-1}{2^n}\chi_{A_{n,k}}(x)+n\chi_{B_n}(x).$$

如果 $f(x_0)<\infty$,则存在自然数 n_0,使 $f(x_0)<n_0$, $n\geqslant n_0$时,$B_{n_0}\supset B_n$, $\mathscr{C}B_{n_0}\subset\mathscr{C}B_n$,故 $n\geqslant n_0$时,$x_0\in\mathscr{C}B_n=\bigcup\limits_{k=1}^{n\cdot 2^n}A_{n,k}$,则 $n\geqslant n_0$时,有

$$0\leqslant f(x_0)-\varphi_n(x_0)<\frac{1}{2^n},$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x_0)=f(x_0).$$

如果 $f(x_0)=+\infty$,则对任一自然数 n,有 $\varphi_n(x_0)=n$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)=+\infty$.

注3 对一般的可测函数 $f(x)$,类似于定理1.3的方法可证明;存在简单函数列$\{\varphi_n(x)\}$,满足$|\varphi_n(x)|\leqslant|\varphi_{n+1}(x)|$ $(n=1,2,\cdots)$,且$\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)=f(x)$. 于是我们得到结论:$f(x)$可测的充要条件是存在简单函数列$\{\varphi_n(x)\}$,使$\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)=f(x)$.

利用上面这一结论,我们可以方便地证明可测函数的代数运算性质.

定理1.4 设 $f(x)$,$g(x)$是定义在可测集 E 上的两个可测函数,则 $f(x)\pm g(x)$,$f(x)\cdot g(x)$和$\dfrac{f(x)}{g(x)}$也是可测函数(这里要假

定运算在 E 上 a. e. 有意义).

证 设 $f(x)$, $g(x)$是 E 上的可测函数,按照定理1.3的附注,存在两个简单函数列$\{f_n(x)\}$, $\{g_n(x)\}$,使

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),\ \lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x),$$

则几乎处处有

$$\lim_{n\to\infty} f_n \pm g_n = f \pm g,\ \lim_{n\to\infty} f_n \cdot g_n = f \cdot g.$$

对于$\frac{f(x)}{g(x)}$, 这时,可设 $g_n(x)\neq 0$,事实上,只要把 $g_n(x)$换成 $g_n(x)+\frac{1}{n}(\mathrm{sgn} g_n(x)+\frac{1}{2})$, 而记号不变,则 $g_n(x)\neq 0$, $g_n(x)$为简单函数,$g_n(x)\to g(x)$, 于是有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_n(x)}{g_n(x)} = \frac{f(x)}{g(x)},\ \text{a. e.}.$$

因此,只要证明两个简单函数的代数运算仍是简单函数即可. 这里仅以和为例,其余请读者考虑. 设简单函 $f_1(x)$, $f_2(x)$表示为

$$f_1(x) = \sum_{k=1}^{p} C_k^{(1)}\chi_{e_k^{(1)}}(x),\ f_2(x) = \sum_{j=1}^{q} C_j^{(2)}\chi_{e_j^{(2)}}(x),$$

则

$$f_1(x) + f_2(x) = \sum_{k,j}(C_k^{(1)} + C_j^{(2)})\chi_{e_k^{(1)}\cap e_j^{(2)}}(x),$$

其中求和是对一切 $k=1,2,\cdots,p$, $j=1,2,\cdots,q$ 而取的,由此可知 $f_1(x)+f_2(x)$是一个简单函数.

§2 可测函数列的收敛性

在§1中已经提到了函数序列的几乎处处收敛概念,在本节中,我们将利用测度的概念,进一步讨论勒贝格可测函数列的各种收敛性及其相互关系. 以下 $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\cdots$, $f_n(x)$, $\cdots$为可测集 E 上的可测函数列,每一个函数 $f_n(x)$在 E 上几乎处处有限.

2.1 近一致收敛和叶果洛夫定理

在数学分析中，函数序列的一致收敛性是非常重要的概念，它能保证极限运算的可交换性，一般说来，一个收敛的函数列在其定义域上不一定一致收敛．

例如考察$[0,1]$上的函数列$\{f_n(x)\}$，其中$f_n(x)=x^n$，$n=1,2,3,\cdots$，这个函数列在$[0,1]$上处处收敛，但非一致收敛．然而，若挖去包含右端点1的一个小领域，即取δ，$0<\delta<1$，把f_n限制在$[0,1-\delta]$上，则f_n一致收敛于0．

实际上，处处收敛的函数序列在一个较小范围中一致收敛的现象，在某种意义下有普遍性，以测度为工具，可以把这个性质刻划出来，这就是下面的叶果洛夫定理．

定义2.1 设$f_n(x)$，$n=1,2,3,\cdots$和$f(x)$均是可测集E上的几乎处处有限可测函数，若对任意的$\delta>0$，存在可测集$E_\delta\subset E$，使$m(E-E_\delta)<\delta$，而$f_n(x)$在E_δ上一致收敛于$f(x)$，则称$\{f_n(x)\}$在E上**近一致收敛**于$f(x)$．

定理2.1 （叶果洛夫） 设E为可测集，$mE<\infty$，$f_n(x)$，$n=1,2,3,\cdots$和$f(x)$均是E上的几乎处处有限可测函数，且$\{f_n(x)\}$在E上几乎处处收敛于$f(x)$，则$\{f_n(x)\}$在E上近一致收敛于$f(x)$．

证 首先由于$E^*=E(|f|=\infty)\cup(\bigcup_{n=1}^{\infty}E(|f_n|=\infty))$为零测度集，所以在证明中不妨设$f(x)$与$f_n(x)$ $(n=1,2,3,\cdots)$在E上有限．我们证明：对任给的$\varepsilon>0$，$\delta>0$，存在可测集$A\subset E$以及自然数n_0，使$m(E-A)<\delta$以及对一切$x\in A$，当$n\geqslant n_0$时有$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$（这里$A$与$\delta$和$\varepsilon$有关）．令

$$B=\{x\in E\colon \lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)\},$$

由假设知$m(E-B)=0$，再令

$$E_m=\{x\in E\colon 对一切\ n\geqslant m,\ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon\}$$

$(m=1,2,3,\cdots)$，则有

$$E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \cdots,$$

且

$$B \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m,$$

因为 $mE<\infty$，$m(E-\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m)=0$，所以 $mE=\lim_{m\to\infty} mE_m$，则

$$\lim_{m\to\infty} m(E-E_m)=0, \tag{2.1}$$

于是可选取自然数 n_0，使得 $m(E-E_{n_0})<\delta$. 令 $A=E_{n_0}$，则 $m(E-A)<\delta$，对一切 $x\in A$，$n\geqslant n_0$时，有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

由上面所证，对任意的 $\delta>0$和自然数 m，存在可测子集 $A_m\subset E$ 以及自然数 n_m，使

$$m(E-A_m)<\frac{\delta}{2^m}, \tag{2.2}$$

以及对一切 $x\in A_m$，当 $n\geqslant n_m$ 时，有

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{1}{m}. \tag{2.3}$$

令 $E_\delta=\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m$，则 $E-E_\delta=\bigcup_{m=1}^{\infty}(E-A_m)$，所以

$$m(E-E_\delta)\leqslant \sum_{m=1}^{\infty} m(E-A_m)<\delta. \tag{2.4}$$

对每一个 m，当 $n\geqslant n_m$ 时，

$$\sup_{x\in E_\delta}|f_n(x)-f(x)|\leqslant \sup_{x\in A_m}|f_n(x)-f(x)\}\leqslant\frac{1}{m}, \tag{2.5}$$

所以在 E_δ 上$\{f_n(x)\}$一致收敛于 $f(x)$.

这个定理告诉我们，当 $mE<\infty$时，几乎处处收敛的可测函数列即使不一致收敛，也是“基本上”(即去掉一个测度任意小的点集外)一致收敛的，因此在许多场合中它提供了处理极限交换的有力工具.

定理2.1中 $mE<\infty$的条件是不能去掉的.

例1 设 $E=(0,+\infty)$，函数列 $\{f_n(x)\}$ 定义如下：

$$f_n(x)=\begin{cases}1, & x\in(0,n],\\ 0, & x\in(n,+\infty),\end{cases} \quad n=1,2,3,\cdots.$$

显然 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上处处收敛于1，但是对任何正数 δ 以及可测集 $E_\sigma\subset E$，当 $m(E-E_\delta)<\delta$ 时，$\{f_n\}$ 在 E_δ 上不能一致收敛于1. 事实上，当 $m(E-E_\delta)<\delta$ 时，对每一个自然数 n，E_δ 不可能全部落在区间 $(0,n]$ 中，因此，必有一点 $x_n\in E_\delta\cap(n,+\infty)$，于是 $f_n(x_n)=0$，这样，$\{f_n\}$ 在 E_δ 上就不能一致收敛于1.

读者还可以证明本定理的逆也成立. 即设 $\{f_n(x)\}$ 与 $f(x)$ 均是可测集 E 上的 a.e. 有限可测函数，如果 $\{f_n\}$ 在 E 上近一致上敛于 f，则必有 $\{f_n\}$ 在 E 上几乎处处收敛于 $f(x)$.

2.2 测度收敛和黎斯定理

本段引进一种比几乎处处收敛弱的收敛概念——测度收敛，并讨论它与近一致收敛，几乎处处收敛之间的关系.

定义2.2 （测度收敛） 设 $\{f_n(x)\}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 和 $f(x)$ 在可测集 E 上几乎处处有限可测，如果对每一个 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty} mE(|f_n-f|\geqslant\varepsilon)=0,$$

则称 $\{f_n\}$ 在 E 上**测度收敛**于 f，简记为 $f_n\xrightarrow{\text{mes}}f$.

测度收敛的意义是：如果事先给定一个（误差）$\varepsilon>0$，不论 ε 有多么小，使得 $|f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon$ 的点 x 虽然可能很多，但这些点 x 的全体组成之集的测度当 $n\to\infty$ 时趋于零. 在概率论中，把概率看作测度，改称为依**概率收敛**.

定理2.2 设 $f_n(x)(n=1,2,3,\cdots)$ 和 $f(x)$ 是可测集 E 上的几乎处处有限可测函数.

(1) 如果 $\{f_n\}$ 在 E 上近一致收敛于 $f(x)$，则 $\{f_n\}$ 在 E 上测度收敛于 f.

(2) 设 $mE<\infty$，$\{f_n\}$ 在 E 上几乎处处收敛于 $f(x)$，则 $\{f_n\}$

在 E 上测度收敛于 f.

证 据叶果洛夫定理，当 $mE<\infty$ 时，由 $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$ 可推出 $\{f_n\}$ 近一致收敛于 f，故只要证明结论(1)，现设 $\{f_n\}$ 近一致收敛于 f，则对任给的 $\varepsilon>0$，$\delta>0$，存在可测子集 $E_\delta \subset E$ 与自然数 N，使 $m(E-E_\delta)<\delta$，而在 E_δ 上有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon(n>N).$$

从而 $mE(|f_n-f|\geqslant\varepsilon)\leqslant m(E-E_\delta)<\delta\ (n>N)$，这就证明了 $f_n \xrightarrow{\text{mes}} f$.

我们指出：$f_n \xrightarrow{\text{mes}} f$ 不一定有 $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$ 以及当 $mE=\infty$ 时，$f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$ 也不一定有 $f_n \xrightarrow{\text{mes}} f$.

例2 设 E 和 $\{f_n(x)\}$ 同例1，$E=(0,+\infty)$，

$$f_n(x)=\begin{cases}1, & x\in(0,n],\\ 0, & x\in(n,+\infty),\end{cases}\qquad n=1,2,3,\cdots.$$

$\{f_n\}$ 处处收敛于1，但是当 $0<\varepsilon<1$ 时，

$$E(|f_n-1|\geqslant\varepsilon)=(n,+\infty).$$

$mE(|f_n-1|\geqslant\varepsilon)=+\infty$，故 $\{f_n\}$ 不测度收敛于1.

例3 设 $E=[0,1]$，$E_n^{(i)}=\left[\dfrac{i-1}{n},\dfrac{i}{n}\right]$，$i=1,2,\cdots,n$，令

$$f_n^{(i)}(x)=\chi_{E_n^{(i)}}(x),$$

因为 $E(|f_n^{(i)}-0|\geqslant\varepsilon)=\left[\dfrac{i-1}{n},\dfrac{i}{n}\right]$，则函数列 $\{f_1^{(1)},f_2^{(1)},f_2^{(2)},f_3^{(1)},f_3^{(2)},f_3^{(3)},\cdots\}$ 必测度收敛于零，但它处处不收敛. 这是因为对任何点 $x_0\in[0,1]$，无论 n 多么大，必有相应的 i_0，使 $x_0\in\left[\dfrac{i_0-1}{n},\dfrac{i_0}{n}\right]$，则 $f_n^{(i_0)}(x_0)=1$，也有相应的 i_1，使 $x_0\overline{\in}\left[\dfrac{i_1-1}{n},\dfrac{i_1}{n}\right]$，$f_n^{(i_1)}(x_0)=0$. 故序列 $\{f_n^{(i)}(x_0)\}$ 中有两个子序列，一个恒为1，一个恒为零，所以不收敛.

定理2.3 (F. Riesz) 设 E 可测集，在 E 上 $f_n \xrightarrow{\text{mes}} f$，则必存在子序列 $f_{n_k} \xrightarrow{\text{a.e.}} f(k\to\infty)$.

证 由于 $f_n \xrightarrow{\text{mes}} f$，则对任意的 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty} mE(|f_n - f| \geqslant \varepsilon) = 0,$$

故对每一个自然数 k，存在 n_k，使

$$mE\left(|f_{n_k} - f| \geqslant \frac{1}{2^k} \right) < \frac{1}{2^k},\ k = 1,2,3,\cdots,$$

此处可不妨设 $n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$，记

$$E_k = E\left(|f_{n_k} - f| \geqslant \frac{1}{2^k} \right),\ R_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k,$$

则 $\{R_n\}$ 为渐缩集列，且 $mR_n \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n-1}}$，$\overline{\lim_k} E_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n$，所以

$$m(\overline{\lim_k} E_k) = \lim_{n\to\infty} mR_n = 0.$$

下面证明在 $E-\overline{\lim_k} E_k$ 上，$\{f_{n_k}(x)\}$ 收敛于 $f(x)$. 据上限集的定义，$x\in E-\overline{\lim_k} E_k$ 等价于 $x\in E$，且 $x \overline{\in} \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n$，即存在 n_0，使 $x \overline{\in} R_{n_0} = \bigcup_{k=n_0}^{\infty} E_k$，也就是说 $k\geqslant n_0$ 时，$x\overline{\in} E_k$，故 $k\geqslant n_0$ 时，有

$$\left| f_{n_k}(x) - f(x) \right| < \frac{1}{2^k}.$$

所以 $x\in E-\overline{\lim_k} E_k$ 时，$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x)$.

定理2.4 设 $\{f_n\}$，$\{g_n\}$ 是可测集 E 上的两列可测函数，$f_n \xrightarrow{\text{mes}} f$，$g_n \xrightarrow{\text{mes}} g$，则

(1) 对任意的实数 α,β，有 $\alpha f_n+\beta g_n \xrightarrow{\text{mes}} \alpha f+\beta g$，

(2) 当 $mE<\infty$ 时，$f_n g_n \xrightarrow{\text{mes}} fg$.

证 (1) 不妨设 $\alpha\neq 0,\beta\neq 0$，对任给的 $\varepsilon>0$，利用 $|f+g|\leqslant |f|+|g|$，当

$$|\alpha f_n(x) + \beta g_n(x) - (\alpha f(x) + \beta g(x)| \geqslant \varepsilon$$

时，必有

$$|\alpha f_n(x) - \alpha f(x)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad 或 \quad |\beta g_n(x) - \beta g(x)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

因此

$$E(|\alpha f_n + \beta g_n - (\alpha f + \beta g)| \geqslant \varepsilon)$$
$$\subset E\left(|f_n - f| \geqslant \frac{\varepsilon}{2|\alpha|}\right) \cup E\left(|g_n - g| \geqslant \frac{\varepsilon}{2|\beta|}\right),$$
$$mE(|\alpha f_n + \beta g_n - (\alpha f + \beta g)| \geqslant \varepsilon)$$
$$\leqslant mE\left(|f_n - f| \geqslant \frac{\varepsilon}{2|\alpha|}\right) + mE\left(|g_n - g| \geqslant \frac{\varepsilon}{2|\beta|}\right),$$

由于 $f_n \xrightarrow{\text{mes}} f$，$g_n \xrightarrow{\text{mes}} g$，所以

$$\lim_{n\to\infty} mE(|\alpha f_n + \beta g_n - (\alpha f + \beta g)| \geqslant \varepsilon) = 0,$$

即 $\alpha f_n + \beta g_n \xrightarrow{\text{mes}} \alpha f + \beta g$.

(2) 设 $mE < \infty$，$f_n g_n$ 不测度收敛于 fg，则存在 $\varepsilon > 0$，$\delta > 0$ 和一列自然数 $\{n_k\}$，使得

$$mE(|f_{n_k} g_{n_k} - fg| \geqslant \varepsilon) > \delta, \tag{2.6}$$

但是利用定理2.3，由 $f_{n_k} \xrightarrow{\text{mes}} f$ 可知，存在 $\{f_{n_k}\}$ 的子序列 $\{f_{n_k'}\}$，使

$$f_{n_k'} \xrightarrow{\text{a.e.}} f.$$

再由 $g_{n_k'} \xrightarrow{\text{mes}} g$，可取 $\{g_{n_k'}\}$ 的子序列 $\{g_{n_k''}\}$ 使

$$g_{n_k''} \xrightarrow{\text{a.e.}} g.$$

则

$$f_{n_k''} g_{n_k''} \xrightarrow{\text{a.e.}} fg,$$

利用定理2.2(2)立即知 $f_{n_k''} g_{n_k''} \xrightarrow{\text{mes}} fg$，这与(2.6)矛盾，所以

$$f_n g_n \xrightarrow{\text{mes}} fg.$$

注意当 $mE = \infty$ 时，不一定有 $f_n g_n \xrightarrow{\text{mes}} fg$. 例如取 $E = [1, +\infty]$，令

$$f(x) = n,\ x \in [n, n+1],\ n = 1,2,3,\cdots,$$

$$g_n(x) = \frac{1}{n},\ x \in [1, +\infty],$$

又取 $f_n \equiv f$, $n=1,2,3,\cdots$, 显然 $f_n \xrightarrow{\text{mes}} f$, $g_n \xrightarrow{\text{mes}} 0$, 但是,当 $x \in [n, n+1]$时

$$f_n(x) g_n(x) = 1,$$

所以$\{f_n g_n\}$并不测度收敛于0.

§3 可测函数的结构(鲁金定理)

本节我们研究可测函数和连续函数之间的关系. 在§1中我们已经看到任何可测集 E 上的连续函数必是可测函数,反过来,可测函数当然未必连续,尽管如此,我们将证明:任何一个可测函数可用连续函数来逼近(几乎处处收敛).

回顾一下定义1.2,我们已经有了 $f(x)$在一个集 E 上连续的概念. 有时一个函数 $f(x)$在 E 上不一定连续,但作为 E 的子集 E_0 上的函数是连续的,我们就说 $f(x)$限制在 E_0上是连续的. 例如,$E=[0,1]$,定义在$[0,1]$上的狄里希莱函数

$$D(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ 为}[0,1] \text{ 中无理数}, \\ 1, & x \text{ 为}[0,1] \text{ 中有理数}. \end{cases}$$

则 $D(x)$在$[0,1]$上不连续,但 $D(x)$限制在无理数集 E_0上是连续的.

定理3.1 (鲁金,Н. Н. Лузин) 设 $f(x)$是可测集 E 上几乎处处有限的可测函数,则对任意的 $\delta>0$,存在闭子集 $F_\delta \subset E$,使得 $m(E-F_\delta)<\delta$,而 $f(x)$限制在 F_δ 上是连续的.

证 不妨设 $f(x)$在 E 上处处有限,我们分三步进行证明.

1° $mE<\infty$,$f(x)$为简单函数的情形. $E=\bigcup_{k=1}^{n} e_k$, e_k 为互不相交的可测集,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k \chi_{e_k}(x).$$

因为 e_k 可测，由第八章定理3.2，对 $\delta>0$，存在闭集 $F_k \subset e_k$，使

$$m(e_k - F_k) < \frac{\delta}{n},\ k = 1,2,\cdots,n,$$

令 $F_\delta = \bigcup_{k=1}^{n} F_k$，$F_\delta \subset E$ 为闭集，$E - F_\delta = \bigcup_{k=1}^{n}(e_k - F_k)$，所以

$$m(E - F_\delta) \leqslant \sum_{k=1}^{n} m(e_k - F_k) < \delta.$$

由于 e_k 互不相交，所以 F_k 也互不相交，在每个 F_k 上 $f(x)$ 取常值，故 $f(x)$ 在 F_δ 上连续.

2° $mE<\infty$，$f(x)$ 为一般可测函数的情形.

由本章定理1.3附注，存在简单函数列 $\{\varphi_n(x)\}$，使 $\{\varphi_n(x)\}$ 处处收敛于 $f(x)$，对每一个 $\varphi_n(x)$，由第一步知存在闭集 $F_n \subset E$，使 $m(E - F_n) < \frac{\delta}{2^{n+1}}$，而 $\varphi_n(x)$ 限制在 F_n 上是连续的，令 $F_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$，则 F_0 是闭集，每个 $\varphi_n(x)$ 限制在 F_0 上是连续的，且

$$m(E - F_0) = m \bigcup_{n=1}^{\infty}(E - F_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m(E - F_n) < \frac{\delta}{2}.$$

又因为 $mF_0 < \infty$，$\varphi_n(x) \longrightarrow f(x)$，按照叶果洛夫定理，存在闭集 $F_\delta \subset F_0$，使 $m(F_0 - F_\delta) < \frac{\delta}{2}$，而在 F_δ 上 $\{\varphi_n(x)\}$ 一致收敛于 $f(x)$，则 $f(x)$ 在 F_δ 上连续，且由于

$$E - F_\delta \subset (E - F_0) \cup (F_0 - F_\delta),$$

则 $m(E - F_\delta) < \delta$.

3° $mE = \infty$ 时，令 $E_n = (n-1, n] \cap E$，$n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$，则 $E = \bigcup_n E_n$，在每一个 E_n 上我们可利用第二步所证结论，从而可证明当 $mE = \infty$ 时本定理结论也成立.

鲁金定理还有另一种形式，为此先给出一个引理，其证明可参阅文献[7].

引理 设 F 是直线 R 上的闭集，函数 $f(x)$ 在 F 上连续，则必

有 R 上的连续函数 $g(x)$，使 $x\in F$ 时，$f(x)=g(x)$，且当 $|f(x)|\leqslant M$ 时，有 $|g(x)|\leqslant M$.

定理3.2 （鲁金） 设 $f(x)$ 是可测集 E 上的几乎处处有限可测函数，则对任何 $\delta>0$，存在 R 上的连续函数 $g(x)$，使得

$$mE(f\neq g)<\delta,$$

且当 $|f(x)|\leqslant M$ 时，有 $|g(x)|\leqslant M$.

证 由定理3.1，对每个 $\delta>0$，存在闭子集 $F_\delta\subset E$，使 f 在 F_δ 上连续，且 $m(E-F_\delta)<\delta$，再利用引理，把 F_δ 上的连续函数 $f(x)$ 延拓为 R 上的连续函数 $g(x)$，则

$$E(f\neq g)\subset E-F_\delta,$$

从而

$$mE(f\neq g)<\delta,$$

$|f(x)|\leqslant M$ 时，$|g(x)|\leqslant M$ 也可由引理得到.

推论3.3 设 $f(x)$ 在可测集 E 上几乎处处有限，则 $f(x)$ 可测的充要条件是：存在 R 上的连续函数序列 $\{f_n(x)\}$，使 $\{f_n\}$ 在 E 上几乎处处收敛于 f，且如果 $f(x)$ 有界，则 $\{f_n(x)\}$ 必一致有界.

证 充分性显然成立.

必要性：设 $f(x)$ 可测，据鲁金定理3.2，对于任一固定的自然数 k，存在 R 上的连续函数 $g_k(x)$，使得

$$mE(f\neq g_k)<\frac{1}{k},$$

此时，显然有

$$g_k\xrightarrow{\text{mes}}f.$$

由本章定理2.3(Riesz 定理)，必存在子序列 $\{g_{k_n}(x)\}$，使

$$g_{k_n}(x)\longrightarrow f,\ \text{a.e.}$$

令 $f_n(x)=g_{k_n}(x)$，则 $\{f_n\}$ 就是推论中所要求的.

实际上，我们还可以按下述办法构造满足推论要求的连续函数. 对每一个自然数 n，必存在 R 上的连续函数 $g_n(x)$，使

$$mE(f \neq g_n) < \frac{1}{2^n},$$

令 $A_n = E(f \neq g_n)$，$A = \overline{\lim_n} A_n$，则读者可证明 $mA = 0$，在 $E - A$ 上，$f_n(x) = g_n(x)$ 收敛于 $f(x)$.

第十章　勒贝格积分

本章将建立勒贝格积分理论．我们从定义可测集 E 上简单函数的勒贝格积分入手，给出了一般可测函数的勒贝格积分，并讨论了勒贝格积分的性质，证明了十分重要的积分极限定理、交换积分顺序定理以及微分和积分的关系，简单介绍了一般测度空间上的测度与积分．

§1　勒贝格积分的定义和性质

1.1　勒贝格积分的定义

为了说明建立勒贝格积分的思想方法，我们从分析黎曼积分入手，回想起数学分析中黎曼积分的定义：

$$(R)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

其中 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，$\delta=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(x_i-x_{i-1})$．

令 $e_i=[x_{i-1},x_i]$，ω_i 为 $f(x)$在 e_i 上的振幅，则 $f(x)$$(R)$可积的充要条件是 $\lim\limits_{\delta\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i(x_i - x_{i-1}) = \lim\limits_{\delta\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i me_i = 0$，即要求 $f(x)$在 e_i 上的振幅 ω_i 都很小才行，基本适用于连续函数．当函数值变化急剧，使 ω_i 不变小的区间很多时，就会有黎曼不可积的情形出现，例如狄里希莱(dirichlet)函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x\text{ 为}[0,1]\text{上的有理数}, \\ 0, & x\text{ 为}[0,1]\text{上的无理数}, \end{cases}$$

在任何小区间$[x_{i-1},x_i]$上 $\omega_i=1$,从而 $\sum_{i=1}^{n}\omega_i(x_i-x_{i-1})=1$,所以 $D(x)$不是黎曼可积的. 今后我们可以证明 $f(x)(R)$可积的充要条件是$f(x)$几乎处处连续,因此(R)积分适用范围小,大量实际问题中碰到的函数不满足这个条件,此外,(R)积分序列求极限运算以及交换积分次序运算都要加上很强的条件,不能满足实际应用的需要. 为了克服黎曼积分的不足,勒贝格提出,考虑如下的积分和:设 $A<f(x)<B$,$f(x)$在$[a,b]$上可测,将$[A,B]$区间分细,分法 π 为 $a=y_0<y_1<\cdots<y_n=B$,令 $e_i=\{x\in[a,b]:y_{i-1}\leqslant f(x)<y_i\}$, 则$[a,b]=\bigcup_{i=1}^{n}e_i$, e_i 互不相交,任取 $\xi_i\in[y_{i-1},\ y_i)$,作和式

$$S=\sum_{i=1}^{n}\xi_i me_i,$$

让 $\delta(\pi)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}(y_i-y_{i-1})\to 0$,如果上式右边极限存在有限,就称这个极限为 $f(x)$在$[a,b]$上的勒贝格积分. 按照这个定义可以证明$[a,b]$上的有界可测函数是勒贝格可积的(参阅文献[7]).

这一积分思想是法国数学家勒贝格 1902 年提出来的,显然,在这一积分和中,$\delta\to 0$ 时,在 e_i 上的振幅 ω_i 总是一致地趋于零的,它克服了黎曼积分和的缺点. 随着时代的发展,勒贝格积分的各种等价定义出现了,因此,目前勒贝格积分处理方法很多,在我们这里,准备采用先定义非负简单函数的勒贝格积分和非负可测函数的勒贝格积分,然后再给出一般可测函数的积分,这种方法对 n 维欧氏空间 R^n 同样有效,并且也适用于建立一般测度空间的积分.

定义 1.1 设 E 为可测集,简单函数

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{n}y_k\chi_{e_k}(x),$$

在 E 上非负,其中 $E=\bigcup_{k=1}^{n}e_k$,e_k 互不相交,则称和数 $\sum_{k=1}^{n}y_k me_k$(有限或$+\infty$)为非负简单函数 $\varphi(x)$在 E 上的勒贝格积分,并记为

$$\int_E \varphi(x)\mathrm{d}m = \sum_{k=1}^{n} y_k m e_k, \tag{1.1}$$

这里约定 $0\cdot(+\infty)=(+\infty)\cdot 0=0$.

由定义 1.1 容易证明非负简单函数的勒贝格积分具有线性和可加性，即

1° 设 $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$是 E 上的两个非负简单函数，$a_1\geqslant 0$，$a_2\geqslant 0$ 是常数，则有

$$\int_E [a_1\varphi_1(x)+a_2\varphi_2(x)]\mathrm{d}m = a_1\int_E \varphi_1(x)\mathrm{d}m + a_2\int_E \varphi_2(x)\mathrm{d}m.$$

2° 如果 $E=E_1\cup E_2$，$E_1\cap E_2=\varnothing$，则有

$$\int_E \varphi(x)\mathrm{d}m = \int_{E_1}\varphi(x)\mathrm{d}m + \int_{E_2}\varphi(x)\mathrm{d}m.$$

我们先证明 2°. 设 $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k \chi_{e_k}(x)$, $x\in E$，则

$$x\in E_1 \text{ 时}, \varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k \chi_{e_k\cap E_1}(x),$$

$$x\in E_2 \text{ 时}, \varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k \chi_{e_k\cap E_2}(x)$$ 均为非负简单函数，且

$$\int_E \varphi(x)\mathrm{d}m = \sum_{k=1}^{n} y_k m e_k = \sum_{k=1}^{n} y_k[m(E_1\cap e_k)+m(E_2\cap e_k)]$$

$$=\int_{E_1}\varphi(x)\mathrm{d}m + \int_{E_2}\varphi(x)\mathrm{d}m.$$

对于 1°，我们设 $\varphi_1(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k\chi_{e_k}(x)$, $\varphi_2(x) = \sum_{j=1}^{n'} y_j'\chi_{e_j'}(x)$, $a_1\geqslant 0$, $a_2\geqslant 0$，则 $a_1\varphi_1(x)+a_2\varphi_2(x)$ 也是非负简单函数，且因为 $E=\bigcup_{k,j} e_k\cap e_j'$，则

$$\int_E (a_1\varphi_1(x)+a_2\varphi_2(x))\mathrm{d}m = \sum_{k,j}\int_{e_k\cap e_j'}(a_1\varphi_1(x)+a_2\varphi_2(x))\mathrm{d}m$$

$$=\sum_{k,j}(a_1 y_k + a_2 y_j')m(e_k\cap e_j')$$

$$=a_1\sum_{k,j}y_k m(e_k\cap e_j')+a_2\sum_{k,j}y_j' m(e_k\cap e_j')$$

$$=a_1\sum_{k=1}^{n}y_k\Big(\sum_{j=1}^{n'}m(e_k\cap e_j')\Big)+a_2\sum_{j=1}^{n'}y_j'\Big(\sum_{k=1}^{n}m(e_j'\cap e_k)\Big)$$

$$=a_1\int_{E_1}\varphi_1(x)\mathrm{d}m+a_2\int_{E_2}\varphi_2(x)\mathrm{d}m.$$

定义 1.2 设 E 为可测集，$f(x)$ 为 E 上的可测函数，如果 $f(x)\geqslant 0$，则规定 $f(x)$ 在 E 上的勒贝格积分为

$$\int_E f(x)\mathrm{d}m=\sup_{0\leqslant\varphi\leqslant f}\int_E\varphi(x)\mathrm{d}m,\tag{1.2}$$

其中 $\varphi(x)$ 为 E 上的简单函数，(1.2)式右边为一非负数，可能是 $+\infty$，若有限，称 $f(x)$ 在 E 上**勒贝格可积**（或简称为 $f(x)$ 在 E 上 (L) 可积），否则称 $f(x)$ 在 E 上的 (L) 积分为 $+\infty$.

对一般的可测函数 $f(x)$，当 $\int_E f_+(x)\mathrm{d}m$ 和 $\int_E f_-(x)\mathrm{d}m$ 不同时为 $+\infty$ 时，规定

$$\int_E f(x)\mathrm{d}m=\int_E f_+(x)\mathrm{d}m-\int_E f_-(x)\mathrm{d}m.\tag{1.3}$$

当(1.3)式右边两项都是有限数时，称 $f(x)$ 在 E 上 (L) 可积，记为 $f\in L(E)$，其余情况称 $f(x)$ 在 E 上的 (L) 积分为 $+\infty$ 或 $-\infty$；如果(1.3)右边两项都是 $+\infty$，积分无意义．今后凡提到 $f(x)$ 在 E 上可积，均是指 (L) 可积．

注 1 由定义 1.2 易知下面三个结论成立：

1° 当 $mE=0$ 时，$\int_E f(x)\mathrm{d}m=0$，

2° 如果 $x\in E$ 时，$f(x)=0$，则 $\int_E f(x)\mathrm{d}m=0$，

3° 如果 $0\leqslant g(x)\leqslant f(x)$，a.e.，$f(x)$，$g(x)$ 在 E 上均可测，则

$$0\leqslant\int_E g(x)\mathrm{d}m\leqslant\int_E f(x)\mathrm{d}m,$$

从而由 $f(x)$ 在 E 可积可推出 $g(x)$ 在 E 上也可积．

注 2 有界可测集 E 上的有界可测函数必可积；可测集 E 上的可积函数必 a.e. 有限．

事实上，设 $|f(x)|\leqslant C$，则 $f_+(x)\leqslant C, f_-(x)\leqslant C$，

$$\int_E f_+(x)\mathrm{d}m=\sup_{0\leqslant\varphi\leqslant f_+}\int_E\varphi(x)\mathrm{d}m\leqslant\sup_{0\leqslant\varphi\leqslant C}\int_E\varphi(x)\mathrm{d}m\leqslant C\cdot mE,$$

同理 $\int_E f_-(x)\mathrm{d}m\leqslant C\cdot mE$，所以 $f(x)$ 在 E 上可积．

如果 $f(x)$ 在 E 上可积，而 $f(x)$ 在 E 上不是 a.e. 有限，令 $E_1=E(f=+\infty), E_2=E(f=-\infty)$，不妨设 $mE_1>0$，因为对任一自然数 n，有

$$f_+(x)\geqslant n\chi_{E_1}(x)\geqslant 0,$$

按定义 1.2，对一切 n 成立

$$\int_E f_+(x)\mathrm{d}m\geqslant n\cdot mE_1,$$

故 $\int_E f_+(x)\mathrm{d}m=+\infty$，这与 $f(x)$ 的可积性矛盾，所以 $f(x)$ 在 E 上必 a.e. 有限．

1.2 勒贝格积分的性质

本段讨论勒贝格积分的基本性质．我们设 E 为可测集，$f(x)$ 为 E 上的可测函数．

定理 1.1 （有限可加性） 设 $E=\bigcup_{k=1}^{n}E_k$，E_k 为互不相交的可测集，$f(x)$ 在 E 上可积，则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}m=\sum_{k=1}^{n}\int_{E_k}f(x)\mathrm{d}m. \tag{1.4}$$

证 不妨设 $f(x)\geqslant 0, n=2$. 设 $E=E_1\cup E_2, E_1\cap E_2=\varnothing$，则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}m=\sup_{0\leqslant\varphi\leqslant f}\int_E\varphi(x)\mathrm{d}m=\sup_{0\leqslant\varphi\leqslant f}\left(\int_{E_1}\varphi(x)+\int_{E_2}\varphi(x)\mathrm{d}m\right).$$

因为从满足 $0\leqslant\varphi(x)\leqslant f(x)\ (x\in E)$ 的简单函数 $\varphi(x)$ 可得到 E_1，E_2 上的两个简单函数 $\varphi_1(x)=\varphi(x)\ (x\in E_1)$，$\varphi_2(x)=\varphi(x)\ (x\in$

E_2)，且满足

$$0 \leqslant \varphi_1(x) \leqslant f(x)\ (x \in E_1),\ 0 \leqslant \varphi_2(x) \leqslant f(x)\ (x \in E_2) \tag{1.5}$$

反之，如果有 E_1, E_2 上满足(1.5)的两个简单函数 $\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$，则

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x), & x \in E_1 \\ \varphi_2(x), & x \in E_2 \end{cases}$$

必是满足 $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant f(x)\ (x \in E)$ 的简单函数，所以

$$\begin{aligned} &\sup_{0\leqslant\varphi\leqslant f}\left(\int_{E_1}\varphi(x)\mathrm{d}m + \int_{E_2}\varphi(x)\mathrm{d}m\right) \\ =& \sup_{\substack{0\leqslant\varphi_1\leqslant f(x\in E_1) \\ 0\leqslant\varphi_2\leqslant f(x\in E_2)}}\left(\int_{E_1}\varphi_1(x)\mathrm{d}m + \int_{E_2}\varphi_2(x)\mathrm{d}m\right) \\ =& \sup_{0\leqslant\varphi_1\leqslant f}\int_{E_1}\varphi_1(x)\mathrm{d}m + \sup_{0\leqslant\varphi_2\leqslant f}\int_{E_2}\varphi_2(x)\mathrm{d}m, \end{aligned}$$

故

$$\int_E f(x)\mathrm{d}m = \int_{E_1} f(x)\mathrm{d}m + \int_{E_2} f(x)\mathrm{d}m.$$

由定理 1.1 证明显然可知，$f(x)$在 E 上可积的充要条件是 $f(x)$在每个 E_k 上可积，且

$$\int_E f(x)\mathrm{d}m = \sum_{k=1}^{n}\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}m.$$

定理 1.2 （绝对连续性） 设 $f(x)$在 E 上可积，则对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $e\subset E$，$me<\delta$ 时，有

$$\left|\int_e f(x)\mathrm{d}m\right| < \varepsilon.$$

证 不妨设 $f(x)\geqslant 0$，据(L)积分的定义 1.2，对任意的 $\varepsilon>0$，存在简单函数 $\varphi_0(x)$，使 $0\leqslant\varphi_0\leqslant f(x)$以及

$$\int_E \varphi_0(x)\mathrm{d}m > \int_E f(x)\mathrm{d}m - \frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2\max\varphi_0(x)}$，则当 $e\subset E$，$me<\delta$ 时，有

$$\int_e \varphi_0(x)\mathrm{d}m<\frac{\varepsilon}{2}.$$

据 $\int_{E-e} f(x)\mathrm{d}m$ 的定义，显然有

$$\int_{E-e} f(x)\mathrm{d}m \geqslant \int_{E-e}\varphi_0(x)\mathrm{d}m,$$

利用积分的可加性

$$\begin{aligned}\int_e f(x)\mathrm{d}m &=\int_E f(x)\mathrm{d}m-\int_{E-e} f(x)\mathrm{d}m\\ &<\int_E \varphi_0(x)\mathrm{d}m+\frac{\varepsilon}{2}-\int_{E-e}\varphi_0(x)\mathrm{d}m\\ &=\int_e \varphi_0(x)\mathrm{d}m+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,\end{aligned}$$

对一般的可积函数，可分别考虑其正部、负部，并利用不等式

$$\left|\int_e f(x)\mathrm{d}m\right| \leqslant \int_e f_+(x)\mathrm{d}m+\int_e f_-(x)\mathrm{d}m$$

即可得到 .

基本引理 设 $f(x)\geqslant 0$，在 E 上可积，简单函数列 $\{f_n(x)\}$ 满足 $0\leqslant f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots$，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ $(x\in E)$，则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}m=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}m. \tag{1.6}$$

证 先设 $f(x)$ 为非负简单函数，因为

$$\int_E f_1(x)\mathrm{d}m\leqslant\int_E f_2(x)\mathrm{d}m\leqslant\cdots\leqslant\int_E f(x)\mathrm{d}m,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}m$ 存在，且

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}m\leqslant\int_E f(x)\mathrm{d}m, \tag{1.7}$$

另一方面，对任给的 $0<\varepsilon<1$，我们构造非负上升简单函数列 $\{g_n\}$，使 $g_n(x)\leqslant f_n(x)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 以及

$$\lim_{n\to\infty}\int_E g_n(x)\mathrm{d}m=(1-\varepsilon)\int_E f(x)\mathrm{d}m.$$

记 $f(x)=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\chi_{A_i}(x)$，$\alpha_i\geqslant 0, i=1,2,\cdots k$，. 对每个 n 和 i，令

$$A_{n,i}=\{x\in A_i: f_n(x)\geqslant(1-\varepsilon)\alpha_i\},$$

则每个 $A_{n,i}$ 可测，对固定的 i，序列 $\{A_{n,i}\}_{n=1}^{\infty}$ 是渐张的，且 $A_i=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_{n,i}$. 如果令

$$g_n(x)=\sum_{i=1}^{k}(1-\varepsilon)\alpha_i\chi_{A_{n,i}}(x),$$

则 $g_n(x)$ 是非负的简单函数，$g_n(x)\leqslant f_n(x)$，

$$\lim_{n\to\infty}\int_E g_n(x)\mathrm{d}m=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k}(1-\varepsilon)\alpha_i m(A_{n,i})$$

$$=\sum_{i=1}^{k}(1-\varepsilon)\alpha_i mA_i=(1-\varepsilon)\int_E f(x)\mathrm{d}m,$$

从而

$$(1-\varepsilon)\int_E f(x)\mathrm{d}m\leqslant\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}m,$$

再令 $\varepsilon\to 0_+$，即得

$$\int_E f(x)\mathrm{d}m\leqslant\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}m.$$

现设 $f(x)$ 为非负可测函数，首先由 (L) 积分的定义知

$$\int_E f_1(x)\mathrm{d}m\leqslant\int_E f_2(x)\mathrm{d}m\leqslant\cdots\leqslant\int_E f(x)\mathrm{d}m,$$

故 $\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}m$ 存在，且

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}m\leqslant\int_E f(x)\mathrm{d}m.$$

另一方面，因为 $\int_E f(x)\mathrm{d}m=\sup_{0\leqslant\varphi\leqslant f}\int_E\varphi(x)\mathrm{d}m$，其中 $\varphi(x)$ 为简单函数，为了证明相反不等式，我们只要证明对任一非负简单函数 $\varphi(x)$，$0\leqslant\varphi(x)\leqslant f(x)$，有

$$\int_E\varphi(x)\mathrm{d}m\leqslant\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}m.$$

对每个自然数 n 令 $g_n(x)=\min(\varphi(x), f_n(x))$，则 $g_n(x)$ 是非负上

升简单函数列，且易知$\lim\limits_{n\to\infty}g_n(x)=\varphi(x)$，则由第一步所证，可得

$$\int_E\varphi(x)\mathrm{d}m=\lim_{n\to\infty}\int_E g_n(x)\mathrm{d}m.$$

又因为

$$\int_E g_n(x)\mathrm{d}m\leqslant\int_E f_n(x)\mathrm{d}m,$$

所以

$$\int_E\varphi(x)\mathrm{d}m\leqslant\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}m,$$

从而

$$\int_E f(x)\mathrm{d}m\leqslant\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}m.$$

注 3 从证明过程容易知道，基本引理对$\int_E f(x)\mathrm{d}m=+\infty$仍然成立．

例 1 设$f(x)$在无界可测集E上可积，则对任一满足$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\Delta_n=R$的渐张区间列$\{\Delta_n\}$，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E\cap\Delta_n}f(x)\mathrm{d}m=\int_E f(x)\mathrm{d}m.$$

证 不妨设$f(x)\geqslant0$，令$E_n=E\cap\Delta_n$，$n=1,2,3,\cdots$，因为$E_n\subset E_{n+1}\subset\cdots\subset E$，则虽然有

$$\int_{E_n}f(x)\mathrm{d}m\leqslant\int_{E_{n+1}}f(x)\mathrm{d}m\leqslant\cdots\leqslant\int_E f(x)\mathrm{d}m,$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}\int_{E_n}f(x)\mathrm{d}m$存在，且

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_n}f(x)\mathrm{d}m\leqslant\int_E f(x)\mathrm{d}m.$$

另一方面，对任给的$\varepsilon>0$，存在简单函数$\varphi(x)$，使$0\leqslant\varphi(x)\leqslant f(x)$，且

$$\int_E\varphi(x)\mathrm{d}m>\int_E f(x)\mathrm{d}m-\varepsilon.$$

令 $\varphi_n(x) = \varphi(x)\chi_{E_n}(x)$，则 $\{\varphi_n(x)\}$ 是非负简单函数列，且 $0 \leqslant \varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x) \leqslant \cdots \leqslant \varphi_n(x) \leqslant \cdots, \lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x) = \varphi(x)$，$\varphi(x)$ 可积，据基本引理

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_n} f(x)\mathrm{d}m \geqslant \lim_{n\to\infty}\int_E \varphi_n(x)\mathrm{d}m$$

$$= \int_E \varphi(x)\mathrm{d}m > \int_E f(x)\mathrm{d}m - \varepsilon,$$

由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的，所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_n} f(x)\mathrm{d}m \geqslant \int_E f(x)\mathrm{d}m.$$

显然，当 $f(x) \geqslant 0, \int_E f(x)\mathrm{d}m = +\infty$ 时，仍然有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_n} f(x)\mathrm{d}m = \int_E f(x)\mathrm{d}m.$$

定理 1.3 （σ 可加性） 设 $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$，$E_k$ 为互不相交的可测集，$f(x)$在 E 上可积，则 $f(x)$在每个 E_k 上可积，且

$$\int_E f(x)\mathrm{d}m = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}m.$$

证 先设 $mE < \infty$，$f(x)$在每个 E_k 上可积显然．令 $R_n = E - \bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k$，因为 $mE = \sum\limits_{k=1}^{\infty} mE_k < \infty$，所以 $mR_n \to 0 (n\to\infty)$，由积分的有限可加性，得

$$\int_E f(x)\mathrm{d}m = \sum_{k=1}^{n}\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}m + \int_{R_n} f(x)\mathrm{d}m,$$

由于 $mR_n \to 0$，据积分的绝对连续性，

$$\lim_{n\to\infty}\int_{R_n} f(x)\mathrm{d}m = 0,$$

所以

$$\int_E f(x)\mathrm{d}m = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}m.$$

$mE=\infty$时，不妨设 $f(x)\geqslant 0$，首先，显然有

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}m \leqslant \int_E f(x)\mathrm{d}m \quad (n=1,2,\cdots),$$

所以

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}m \leqslant \int_E f(x)\mathrm{d}m.$$

另一方面，对每个自然数 n，令 $A_n=E\cap(-n,n)$，则 $mA_n<\infty$，$A_n=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(E_k\cap(-n,n))$，其中$\{E_k\cap(-n,n)\}_{k=1}^{\infty}$互不相交，则

$$\int_{A_n} f(x)\mathrm{d}m = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k\cap(-n,n)} f(x)\mathrm{d}m,$$

故

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}m \geqslant \int_{A_n} f(x)\mathrm{d}m \quad (n=1,2,3,\cdots).$$

据例 1，我们可得

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}m \geqslant \lim_{n\to\infty}\int_{A_n} f(x)\mathrm{d}m = \int_E f(x)\mathrm{d}m.$$

定理 1.4　设 $f(x)$，$g(x)$是 E 上的可积函数，则 $\alpha f(x)$，$f(x)+g(x)$（α 为任一实数）在 E 上也可积，且

$$\int_E \alpha f(x)\mathrm{d}m = \alpha\int_E f(x)\mathrm{d}m,$$

$$\int_E (f(x)+g(x))\mathrm{d}m = \int_E f(x)\mathrm{d}m + \int_E g(x)\mathrm{d}m.$$

证　先设 $\alpha\geqslant 0$，则$(\alpha f)_+=\alpha f_+$，$(\alpha f)_-=\alpha f_-$，据第九章定理 1.3，存在非负递增的简单函数列$\{\varphi_n(x)\}$，$0\leqslant\varphi_1(x)\leqslant\varphi_2(x)\leqslant\cdots\leqslant\varphi_n(x)\leqslant\cdots$，使$\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)=f_+(x)$，则$\{\alpha\varphi_n(x)\}$是非负递增的简单函数列，$\alpha\varphi_n(x)\to(\alpha f)_+$，应用基本引理可得

$$\begin{aligned}\int_E (\alpha f)_+\,\mathrm{d}m &= \lim_{n\to\infty}\int_E \alpha\varphi_n(x)\mathrm{d}m\\ &= \alpha\lim_{n\to\infty}\int_E \varphi_n(x)\mathrm{d}m\end{aligned}$$

$$=\alpha\int_E f_+(x)\mathrm{d}m,$$

同理

$$\int_E(\alpha f)_-\,\mathrm{d}m=\alpha\int_E f_-(x)\mathrm{d}m,$$

故

$$\int_E\alpha f(x)\mathrm{d}m=\alpha\int_E f(x)\mathrm{d}m.$$

再设 $\alpha<0$，则由 $-f=f_- - f_+$，据积分定义，

$$\begin{aligned}\int_E(-f)\mathrm{d}m&=\int_E f_-(x)\mathrm{d}m-\int_E f_+(x)\mathrm{d}m\\&=-\left\{\int_E f_+(x)\mathrm{d}m-\int_E f_-(x)\mathrm{d}m\right\}\\&=-\int_E f(x)\mathrm{d}m,\end{aligned}$$

从而

$$\int_E(\alpha f)\mathrm{d}m=-\int_E(-\alpha f)\mathrm{d}m=\alpha\int_E f(x)\mathrm{d}m.$$

下面证明积分的可加性．先设 $f(x)\geqslant 0, g(x)\geqslant 0$，则可取两个非负递增的简单函数列 $\{f_n(x)\}$ 和 $\{g_n(x)\}$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$，$\lim\limits_{n\to\infty}g_n(x)=g(x)$，据基本引理立即知

$$\int_E(f+g)\mathrm{d}m=\int_E f(x)\mathrm{d}m+\int_E g(x)\mathrm{d}m.$$

对一般的可积函数 $f(x)$，$g(x)$，由于

$$0\leqslant(f+g)_+\leqslant f_+ + g_+,\quad 0\leqslant(f+g)_-\leqslant f_- + g_-,$$

据非负函数积分的定义，并利用非负可积函数的积分可加性，得

$$\begin{aligned}\int_E(f+g)_+\,\mathrm{d}m&\leqslant\int_E(f_+ + g_+)\mathrm{d}m\\&=\int_E f_+\,\mathrm{d}m+\int_E g_+\,\mathrm{d}m,\end{aligned}$$

$$\int_E(f+g)_-\,\mathrm{d}m\leqslant\int_E(f_- + g_-)\mathrm{d}m$$

$$= \int_E f_- \, dm + \int_E g_- \, dm,$$

故 $f+g$ 必可积,又因为

$$(f+g)_+ - (f+g)_- = f+g = (f_+ - f_-) + (g_+ - g_-)$$
$$= (f_+ + g_+) - (f_- + g_-),$$

所以

$$(f+g)_+ + (f_- + g_-) = (f_+ + g_+) + (f+g)_-,$$

则据非负可积函数的积分可加性,有

$$\int_E (f+g)_+ \, dm + \int_E (f_- + g_-) dm$$
$$= \int_E (f_+ + g_+) dm + \int_E (f+g)_- \, dm,$$

从而

$$\int_E (f+g) dm = \int_E f dm + \int_E g dm.$$

注 4 若 f,g 是 E 上的非负可测函数,$\alpha \geqslant 0$,则由基本引理立即可得

$$\int_E \alpha f(x) dm = \alpha \int_E f(x) dm,$$
$$\int_E (f+g) dm = \int_E f(x) dm + \int_E g(x) dm.$$

定理 1.5 (1) 单调性:设 $f(x),g(x)$ 是 E 上的可积函数,且 $f(x) \leqslant g(x)$,则 $\int_E f(x) dm \leqslant \int_E g(x) dm$,

(2) 绝对可积性:$f(x)$ 在 E 上可积的充要条件是 $|f(x)|$ 在 E 上可积,且

$$\left| \int_E f(x) dm \right| \leqslant \int_E |f(x)| dm.$$

证 (1)由积分的线性和非负函数积分的定义知

$$\int_E g(x) dm - \int_E f(x) dm = \int_E (g-f) dm \geqslant 0,$$

故

$$\int_E f(x)\mathrm{d}m \leqslant \int_E g(x)\mathrm{d}m.$$

(2) 由于 $|f(x)| = f_+ + f_-$，故 $f(x)$ 可积的充要条件是 $|f(x)|$ 可积，且

$$\int_E |f(x)|\mathrm{d}m = \int_E f_+(x)\mathrm{d}m + \int_E f_-(x)\mathrm{d}m,$$

故

$$\left|\int_E f(x)\mathrm{d}m\right| = \left|\int_E f_+(x)\mathrm{d}m - \int_E f_-(x)\mathrm{d}m\right| \leqslant \int_E |f(x)|\mathrm{d}m.$$

定理 1.6 （唯一性定理） 设 $f(x)$ 在 E 上可积，则 $\int_E |f(x)|\mathrm{d}m = 0$ 的充要条件是 $f \sim 0$.

证 充分性：设 $f\sim 0$，则据积分的有限可加性

$$\int_E |f(x)|\mathrm{d}m = \int_{E(f=0)} |f(x)|\mathrm{d}m + \int_{E(f\neq 0)} |f(x)|\mathrm{d}m,$$

在 $E(f=0)$ 上，$f(x)=0$，则 $\int_{E(f=0)} |f(x)|\mathrm{d}m = 0$，在 $E(f\neq 0)$ 上，由于 $mE(f\neq 0) = 0$，所以 $\int_{E(f\neq 0)} |f(x)|\mathrm{d}m = 0$，故 $\int_E |f(x)|\mathrm{d}m = 0$.

必要性：设 n 为任一自然数，因为

$$0 = \int_E |f(x)|\mathrm{d}m \geqslant \int_{E(|f|\geqslant \frac{1}{n})} |f(x)|\mathrm{d}m$$

$$\geqslant \frac{1}{n} mE\left(|f| \geqslant \frac{1}{n}\right) \geqslant 0,$$

所以

$$mE\left(|f| \geqslant \frac{1}{n}\right) = 0,\ n = 1,2,3,\cdots.$$

由于集合 $E(f\neq 0) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E\left(|f| \geqslant \frac{1}{n}\right)$，故 $mE(f\neq 0) = 0$，即 $f\sim 0$.

推论 设 $f(x)\sim g(x)$，则由 $f(x)$ 的可积性可推出 $g(x)$ 可积，且积分值相同.

定理 1.7 （积分逼近定理） 设 $f(x)$是可测集 E 上的可积函数,则对任给的 $\varepsilon>0$,存在 R 上的连续函数 $g(x)$,使

$$\int_E |f(x)-g(x)|\mathrm{d}m<\varepsilon,$$

且当$|f(x)|\leqslant M$ 时有$|g(x)|\leqslant M$.

证 对任给的 $\varepsilon>0$,先证明存在简单函数 $\varphi(x)$,使

$$\int_E |(f(x)-\varphi(x)|\mathrm{d}m<\frac{\varepsilon}{2}.$$

因为 $f(x)=f_+-f_-$, $\int_E f(x)\mathrm{d}m=\int_E f_+\,\mathrm{d}m-\int_E f_-\,\mathrm{d}m$, 对 $f_+(x)$, 按非负函数积分的定义,有简单函数$\varphi_1(x)$, $0\leqslant\varphi_1(x)\leqslant f_+(x)$, 使

$$\int_E f_+(x)\mathrm{d}m<\int_E\varphi_1(x)\mathrm{d}m+\frac{\varepsilon}{4},$$

同理,存在简单函数 $\varphi_2(x)$, $0\leqslant\varphi_2(x)\leqslant f_-(x)$,使

$$\int_E f_-(x)\mathrm{d}m<\int_E\varphi_2(x)\mathrm{d}m+\frac{\varepsilon}{4}.$$

令 $\varphi(x)=\varphi_1(x)-\varphi_2(x)$, 则 $\varphi(x)$是简单函数,满足

$$\begin{aligned}
&\int_E|f(x)-\varphi(x)|\mathrm{d}m\\
=&\int_E|f_+(x)-f_-(x)-\varphi_1(x)+\varphi_2(x)|\mathrm{d}m\\
\leqslant&\int_E|f_+(x)-\varphi_1(x)|\mathrm{d}m+\int_E|f_-(x)-\varphi_2(x)|\mathrm{d}m\\
<&\frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

设$|\varphi(x)|\leqslant M$,对 $\varphi(x)$应用鲁金定理 3.2,对任给的 $\delta>0$,存在 R 上的连续函数 $g(x)$, 使 $mE(\varphi\neq g)<\delta$,且$|g(x)|\leqslant M$,现取 $\delta>0$,使 $M\delta<\frac{\varepsilon}{4}$,则

$$\int_E|\varphi(x)-g(x)|\mathrm{d}m=\int_{E(\varphi\neq g)}|\varphi(x)-g(x)|\mathrm{d}m$$

$$\leqslant 2M \cdot \delta < \frac{\varepsilon}{2},$$

从而可得

$$\int_E |f(x) - g(x)| \mathrm{d}m < \varepsilon.$$

显然当 $|f(x)| \leqslant M$ 时，一定有 $|\varphi(x)| = |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| \leqslant M$，故也有 $|g(x)| \leqslant M$.

例 2 设在[0,1]中有 n 个可测集 $e_1, e_2, \cdots, e_n$，如果[0,1]中每一点至少属于上述 n 个集中的 p 个集，则 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 中至少有一个集的测度不小于 $\frac{p}{n}$.

证 $\chi_{e_i}(x)$ 表示可测集 e_i 上的特征函数，它是[0,1]上的有界可测函数，必可积．由条件，对任一 $x \in [0,1]$，有

$$\sum_{i=1}^{n} \chi_{e_i}(x) \geqslant p,$$

因此

$$\int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{n} \chi_{e_i}(x) \right) \mathrm{d}m \geqslant \int_0^1 p \mathrm{d}m = p.$$

另一方面

$$\int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{n} \chi_{e_i}(x) \right) \mathrm{d}m = \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \chi_{e_i}(x) \mathrm{d}m = \sum_{i=1}^{n} m e_i,$$

所以

$$\sum_{i=1}^{n} m e_i \geqslant p,$$

从而至少有一个集合 e_i，满足 $m e_i \geqslant \frac{p}{n}$.

例 3 设 $f(x)$ 在 R 上可积，且对任一实数 a 和 $\varepsilon > 0$，有

$$\int_a^{a+\varepsilon} f(x) \mathrm{d}m = 0,$$

则 $f(x) \sim 0$.

证 设 G 为有界开集，则 $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} (\alpha_i, \beta_i)$，$(\alpha_i, \beta_i)$ 互不相交，由

积分的 σ 可加性立即知

$$\int_G f(x)\mathrm{d}m = 0.$$

对任一自然数 N,令

$$E_+ = \{x \in [-N,N]: f(x) \geqslant 0\},$$
$$E_- = \{x \in [-N,N]: f(x) < 0\},$$

E_+ 是有界可测集,则对任意的 $\delta>0$,存在有界开集 $G \supset E_+$,使 $m(G-E_+)<\delta$,由积分的绝对连续性,对任意的 $\varepsilon>0$,可取 $\delta>0$,使

$$\left|\int_{G-E_+} f(x)\mathrm{d}m\right| < \varepsilon,$$

则

$$0 = \int_G f(x)\mathrm{d}m = \int_{E_+} f(x)\mathrm{d}m + \int_{G-E_+} f(x)\mathrm{d}m,$$

所以

$$\left|\int_{E_+} f(x)\mathrm{d}m\right| < \varepsilon.$$

因为 $\varepsilon>0$ 是任意的,就 $\int_{E_+} f(x)\mathrm{d}m = 0$,从而在 E_+上 $f(x)=0$, a.e.. 同理可证,在 E_-上,$f(x)=0$,a.e.,故在 R 上,$f(x)\sim 0$.

§2 积分序列的极限定理

本节主要讨论积分号下取极限问题,我们将看到,这类问题在(L)积分中所要求的条件比黎曼积分要弱得多,正因为如此,这些基本定理在一般的分析数学中有着广泛的应用. 我们由勒维单调收敛定理出发,来得到(L)积分序列极限的逐项积分定理,法杜定理和勒贝格控制收敛定理,并利用积分序列的极限定理讨论了(L)积分与(R)积分的关系.

2.1 勒维定理、法杜定理和控制收敛定理

定理 2.1 （勒维单调收敛定理） 设可测集 E 上的可测函数列 $\{f_n\}$ 满足 $0 \leqslant f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \cdots \leqslant f_n(x) \leqslant \cdots$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, $x \in E$,则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}m = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}m \quad (\text{有限或} +\infty).$$

证 因为$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, 则 $f(x)$在 E 上可测,且 $0 \leqslant f_n \leqslant f_{n+1} \leqslant \cdots \leqslant f$ $(n=1,2,3,\cdots)$,所以

$$0 \leqslant \int_E f_n(x)\mathrm{d}m \leqslant \int_E f_{n+1}(x)\mathrm{d}m \leqslant \cdots \leqslant \int_E f(x)\mathrm{d}m,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}m \leqslant \int_E f(x)\mathrm{d}m. \tag{2.1}$$

另一方面,对任一满足 $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant f(x)$的简单函数 $\varphi(x) = \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k \chi_{e_k}(x)$ 和 $0 < c < 1$, 令

$$E_n = \{x \in E: f_n(x) \geqslant c\varphi(x)\}, \ n = 1,2,3,\cdots,$$

由于每个 $f_n(x)$, $\varphi(x)$都是可测函数,则每个 E_n 是可测集,$E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_n \subset \cdots$,且 $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. 事实上,若 $f(x) = 0$, 则 $x \in E_1$, 若 $f(x) > 0$, 因为 $0 < c < 1$, $c\varphi(x) < f(x)$, 故存在自然数 n,使 $f_n(x) \geqslant c\varphi(x)$, 所以 $x \in E_n$, 故 $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. 下面证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}m \geqslant c\int_E \varphi(x)\mathrm{d}m.$$

因为

$$\int_E f_n(x)\mathrm{d}m \geqslant \int_{E_n} f_n(x)\mathrm{d}m \geqslant c\int_{E_n} \varphi(x)\mathrm{d}m$$

$$= c\sum_{k=1}^{m} \alpha_k m(E_n \cap e_k),$$

$$\lim_{n\to\infty} m(E_n \cap e_k) = m(E \cap e_k).$$

则对每一个 $0<c<1$ 和每一个简单函数 $\varphi(x)$，$0\leqslant\varphi(x)\leqslant f(x)$，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}m \geqslant c\sum_{k=1}^{m}\alpha_k m(E\cap e_k) = c\int_E \varphi(x)\mathrm{d}m.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}m \geqslant \int_E f(x)\mathrm{d}m, \tag{2.2}$$

由(2.1)，(2.2)立即知

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}m = \int_E f(x)\mathrm{d}m.$$

注 在勒维定理中，若将$\{f_n\}$非负上升改为非负下降，则结论不一定成立，例如，$f_n(x)=\dfrac{1}{nx}$，$x\in[0,1]$，$f_n(x)\geqslant 0$，下降，$f_n(x)\longrightarrow f(x)\overset{\text{a. e.}}{=\!=}0$，但 $\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}m=+\infty(n=1,2,3,\cdots)$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}m\neq\int_0^1 f(x)\mathrm{d}m$．但读者可以证明：如果$\{f_n(x)\}$是$E$上的单调上升可积函数序列(或者是单调下降可积函数序，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$，则同样有

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}m = \int_E f(x)\mathrm{d}m \quad (\text{有限或}\ \infty).$$

利用勒维定理立即得到下面的逐项积分定理．

定理 2.2 （逐项积分定理） 设每个 $u_n(x)$在可测集 E 上非负可测，$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$，则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}m = \sum_{n=1}^{\infty}\int_E u_n(x)\mathrm{d}m \quad (\text{有限或} +\infty).$$

证 令 $f_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(x)$，则 $0\leqslant f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots\leqslant f_n(x)\leqslant\cdots$，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$，由勒维定理

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}m = \int_E f(x)\mathrm{d}m,$$

则

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_E u_k(x)\mathrm{d}m = \lim_{n\to\infty}\int_E \sum_{k=1}^{n} u_k(x)\mathrm{d}m = \int_E f(x)\mathrm{d}m.$$

定理 2.3 （法杜定理） 设$\{f_n(x)\}$是E上的非负可测函数序列，则

$$\int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}m \leqslant \varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}m.$$

证 $u_n(x)=\inf\{f_n(x), f_{n+1}(x), \cdots\}$，则对任一自然数$n$，有$u_n(x)\leqslant f_n(x)$，且$0\leqslant u_1(x)\leqslant u_2(x)\leqslant\cdots\leqslant u_n(x)\leqslant\cdots$，$\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x)=\varliminf\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. 对$\{u_n(x)\}$应用勒维定理，即得

$$\int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}m = \lim_{n\to\infty}\int_E u_n(x)\mathrm{d}m.$$

但因$u_n(x)\leqslant f_n(x)$，$n=1,2,3,\cdots$，故$\int_E u_n(x)\mathrm{d}m \leqslant \int_E f_n(x)\mathrm{d}m$，$n=1,2,3,\cdots$，从而

$$\int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}m \leqslant \varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}m.$$

定理 2.4 （控制收敛定理） 设$\{f_n(x)\}$是E上的可测函数序列，$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\overset{\text{a.e.}}{=\!=\!=} f(x)$，且存在可积函数$g(x)$，使$|f_n(x)|\leqslant g(x)$, a.e.，$n=1,2,3,\cdots$，则$f(x)$在$E$上可积，且

$$\int_E f(x)\mathrm{d}m = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}m.$$

证 由定理条件显然可知$f(x)$可测，且$|f(x)|\leqslant g(x)$, a.e.，因为$g(x)$在E上可积，故$f(x)$在E上可积. 下面证明$\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}m = \int_E f(x)\mathrm{d}m$. 不妨设$-g(x)\leqslant f_n(x)\leqslant g(x)$，$n=1,2,\cdots$，则$g(x)+f_n(x)\geqslant 0$，$n=1,2,3,\cdots$，对序列$\{g(x)+f_n(x)\}$应用法杜定理，得

$$\varliminf_{n\to\infty}\int_E (g(x)+f_n(x))\mathrm{d}m \geqslant \int_E g(x)\mathrm{d}m + \int_E f(x)\mathrm{d}m.$$

利用$\varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n)\leqslant\varliminf_{n\to\infty}x_n+\varlimsup_{n\to\infty}y_n$和积分的可加性，得

$$\varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}m+\int_E g(x)\mathrm{d}m\geqslant\int_E g(x)\mathrm{d}m+\int_E f(x)\mathrm{d}m,$$

所以

$$\varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}m\geqslant\int_E f(x)\mathrm{d}m. \tag{2.3}$$

同理，$g(x)-f_n(x)\geqslant 0, n=1,2,3,\cdots$，对序列$\{g(x)-f_n(x)\}$应用法杜定理，得

$$\varliminf_{n\to\infty}\int_E (g(x)-f_n(x))\mathrm{d}m\geqslant\int_E g(x)\mathrm{d}m-\int_E f(x)\mathrm{d}m,$$

则可得

$$\varliminf_{n\to\infty}\int_E (-f_n(x))\mathrm{d}m+\int_E g(x)\mathrm{d}m\geqslant\int_E g(x)\mathrm{d}m-\int_E f(x)\mathrm{d}m,$$

从而

$$\varlimsup_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}m\leqslant\int_E f(x)\mathrm{d}m. \tag{2.4}$$

由(2.3)，(2.4)立即得

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}m=\int_E f(x)\mathrm{d}m.$$

控制收敛定理中函数$g(x)$称作控制函数，为了方便起见，勒贝格控制收敛定理通常简记为$L.D.C.$.

推论 设$mE<\infty$，E上的可测函数列$\{f_n(x)\}$满足$|f_n(x)|\leqslant K$ $(n=1,2,3,\cdots,x\in E)$，$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$，a.e.，则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}m=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}m.$$

这是定理2.4的一个重要特例，它称为**有界(控制)收敛定理**.

注2 控制收敛定理还可以推广到含有连续参变量$\alpha\in I$的情形：

设$\{f_\alpha(x)|\leqslant g(x)$，$(\alpha\in I)$，每个$f_\alpha(x)$在$E$上可测，$g(x)$在

E 上可积，$\lim\limits_{\alpha\to\alpha_0} f_\alpha(x)=f(x)$，a. e. （$\alpha_0$ 是 I 的一个聚点，可以为 ∞），则 $f(x)$在 E 上可积，且

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\int_E f_\alpha(x)\mathrm{d}m=\int_E f(x)\mathrm{d}m.$$

定理 2.5 设 E 上的可测函数列$\{f_n(x)\}$满足条件：$|f_n(x)|\leqslant g(x)$，a. e. （$n=1,2,3,\cdots$），$g(x)$在 E 上可积，且 $f_n(x)\xrightarrow{\text{mes}} f(x)$，则 $f(x)$在 E 上可积，且

$$\int_E f(x)\mathrm{d}m=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}m.$$

证 因为 $f_n(x)\xrightarrow{\text{mes}} f(x)$，由第九章 § 2 的 Fiesz 定理，存在子序列 $f_{n_k}(x)\xrightarrow{\text{a. e.}} f(x)$，由于 $|f_{n_k}(x)-f(x)|\leqslant|f_{n_k}(x)|+|f(x)|\leqslant 2g(x)$，a. e.，则据 L. D. C. 可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_E|f_{n_k}(x)-f(x)|\mathrm{d}m=0.$$

现设

$$\lim_{n\to\infty}\int_E|f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}m\neq 0,$$

则存在 $\varepsilon_0>0$ 及子序列$\{n_i\}$，使

$$\int_E|f_{n_i}(x)-f(x)|\mathrm{d}m\geqslant\varepsilon_0\quad(i=1,2,3,\cdots),\qquad(2.5)$$

利用 $f_{n_i}(x)\xrightarrow{\text{mes}} f(x)$，必存在$\{f_{n_i}(x)\}$的子序列 $f_{n_i'}(x)\xrightarrow{\text{a. e.}} f(x)$，由上面所证

$$\lim_{i\to\infty}\int_E|f_{n_i'}(x)-f(x)|\mathrm{d}m=0.\qquad(2.6)$$

这与(2.5)矛盾，故

$$\lim_{n\to\infty}\int_E|f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}m=0,$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}m=\int_E f(x)\mathrm{d}m.$$

2.2 极限定理的应用

本段将利用极限定理来讨论(L)积分和(R)积分的关系，并举例说明极限定理的一些应用．

我们知道，一个函数 $f(x)$在$[a,b]$上黎曼可积的充要条件是

$$\lim_{\delta\to 0} S = \lim_{\delta\to 0} s = I \quad \text{有限},$$

其中 S,s 分别为大和与小和，$\delta=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(x_i-x_{i-1})$．因此$[0,1]$上的狄里希莱函数 $D(x)$不是黎曼可积的，但它一定是(L)可积的，一般地，我们可以证明下面的结论．

定理 2.6 设 $f(x)$在有限区间$[a,b]$上(R)可积，则 $f(x)$在$[a,b]$上(L)可积，且积分值相等．

证 设 $f(x)$在$[a,b]$上(R)可积，则 $f(x)$必有界，令$|f(x)|\leqslant M$，作$[a,b]$的分割序列 D_i：$a=x_0^{(i)}<x_1^{(i)}<\cdots<x_{n_i}^{(i)}=b$，使 D_{i+1} 的分点包含 D_i 的分点(即 $D_{i+1}\supset D_i$)，且

$$\delta(D_i) = \max_{1\leqslant k\leqslant n_i}(x_k^{(i)} - x_{k-1}^{(i)}) \to 0 \ (i\to\infty).$$

作简单函数列$\{\underline{f}_i(x)\}$和$\{\overline{f}_i(x)\}$如下：

$$\underline{f}_i(x) = \begin{cases} m_k^{(i)}, & x_{k-1}^{(i)} \leqslant x < x_k^{(i)},\ k=1,2,\cdots n_i, \\ f(b), & x=b, \end{cases}$$

$$\overline{f}_i(x) = \begin{cases} M_k^{(i)}, & x_{k-1}^{(i)} \leqslant x < x_k^{(i)},\ k=1,2,\cdots,n_i, \\ f(b), & x=b, \end{cases}$$

其中 $m_k^{(i)}$，$M_k^{(i)}$ 分别为 $f(x)$在子区间$[x_{k-1}^{(i)},\ x_k^{(i)}]$上的下确界和上确界．由于 $D_{i+1}\supset D_i$，则显然有$\{\underline{f}_i(x)\}$上升，$\{\overline{f}_i(x)\}$下降，且

$$-M \leqslant \underline{f}_1(x) \leqslant \underline{f}_2(x) \leqslant \cdots \leqslant f(x) \leqslant M,$$

$$M \geqslant \overline{f}_1(x) \geqslant \overline{f}_2(x) \geqslant \cdots \geqslant f(x) \geqslant -M,$$

记 $\overline{f}(x)=\lim\limits_{i\to\infty}\overline{f}_i(x)$，$\underline{f}(x)=\lim\limits_{i\to\infty}\underline{f}_i(x)$，$|\underline{f}_i(x)|\leqslant M$，$|\overline{f}_i(x)|\leqslant M$，显然有 $\underline{f}(x)\leqslant f(x)\leqslant\overline{f}(x)$以及

$$\int_a^b \underline{f}_i(x)\mathrm{d}m = \sum_{k=1}^{n_i} m_k^{(i)}(x_k^{(i)} - x_{k-1}^{(i)}) = s_i \longrightarrow (R)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

$$\int_a^b \overline{f}_i(x)\mathrm{d}m = \sum_{k=1}^{n_i} M_k^{(i)}(x_k^{(i)} - x_{k-1}^{(i)}) = S_i \longrightarrow (R)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

按照有界控制收敛定理，得

$$\int_a^b \overline{f}(x)\mathrm{d}m = \int_a^b \underline{f}(x)\mathrm{d}m = (R)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

故

$$\int_a^b [\overline{f}(x) - \underline{f}(x)]\mathrm{d}m = 0.$$

因为 $\overline{f}(x)-\underline{f}(x)\geqslant 0$，所以 $\overline{f}(x)\sim\underline{f}(x)$，从而 $f(x)\sim\overline{f}(x)\sim\underline{f}(x)$，故 $f(x)$在$[a,b]$上(L)可积，且

$$(L)\int_a^b f(x)\mathrm{d}m = (R)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

定理 2.7 $f(x)$在$[a,b]$上黎曼可积的充要条件是 $f(x)$有界且几乎处处连续.

证 令 $m_\delta(x)=\inf\{f(t): t\in(x-\delta,x+\delta)\}$，$M_\delta(x)=\sup\{f(t): t\in(x-\delta,x+\delta)\}$，则 $m_\delta(x)$关于 $\delta\to 0_+$单调上升，$M_\delta(x)$关于 $\delta\to 0_+$单调下降.

$$m_\delta(x)\leqslant f(x)\leqslant M_\delta(x) \quad (\delta>0).$$

再令

$$m(x) = \lim_{\delta\to 0_+} m_\delta(x),\ M(x) = \lim_{\delta\to 0_+} M_\delta(x),$$

则

$$m_\delta(x)\leqslant m(x)\leqslant f(x)\leqslant M(x)\leqslant M_\delta(x).$$

设$\{\underline{f}_i(x)\}$，$\{\overline{f}_i(x)\}$是定理2.6中所取的两个序列，则我们可以证明：

(1) $\overline{f}(x)\overset{\text{a.e.}}{=\!=}M(x)$，$\underline{f}(x)\overset{\text{a.e.}}{=\!=}m(x)$，

(2) $f(x)$在点 x 连续的充要条件是 $m(x)=M(x)$.

因为 $f(x)(R)$可积的充要条件是 $S_i-s_i\to 0\,(i\to\infty)$，即 $\int_a^b[\overline{f}(x)-\underline{f}(x)]\mathrm{d}m=0$，根据(1)$f(x)(R)$可积等价于$(L)$积分

$$\int_a^b [M(x) - m(x)] \mathrm{d}m = 0,$$

即

$$M(x) \sim m(x).$$

再据(2)知本定理结论成立.

黎曼积分的这一特征从(R)积分本身是得不到的,必须借助勒贝格测度和勒贝格积分理论.

注 3 对广义黎曼积分,定理 2.6 结论不再成立,但读者可以证明:对非负函数 $f(x)$,若 $f(x)$广义黎曼可积,则 $f(x)$必(L)可积,且积分值相同.

例 1 设

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}, & x \in (0,1], \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

则 $f(x)$在$[0,1]$上虽然广义黎曼可积,但 $f(x)$不是(L)可积的,这是因为 $f(x)$非绝对可积.

下面我们再给出几个例子来说明极限定理的应用.

例 2 设 $f_n(x)$在$[a,b]$上(R)可积,$|f_n(x)| \leqslant K$, $n=1,2,3,\cdots$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, 且 $f(x)$在$[a,b]$上(R)可积,则

$$\lim_{n\to\infty} (R)\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = (R)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

事实上,因为

$$(R)\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = (L)\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}m,$$

$$(R)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (L)\int_a^b f(x)\mathrm{d}m,$$

对$\{f_n(x)\}$应用有界控制收敛定理,立即得

$$\lim_{n\to\infty} (R)\int_n^b f_n(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} (L)\int_n^b f_n(x)\mathrm{d}m$$

$$= (L)\int_n^b f(x)\mathrm{d}m = (R)\int_n^b f(x)\mathrm{d}x.$$

例 3 设 $f(x,t)$ 对每个 $t\in[\alpha,\beta]$ 是 $[a,b]$ 上关于 x 的可积函数，对所有的 x，$f(x,t)$ 对 t 有偏导数，且存在 $[a,b]$ 上的可积函数 $g(x)$，使

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)\right|\leqslant g(x),\quad (a\leqslant x\leqslant b,\ \alpha\leqslant t\leqslant\beta)$$

则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)\mathrm{d}x,$$

这里出现的积分 $\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x$ 和 $\int_a^b\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)\mathrm{d}x$ 都表示 (L) 积分．

证

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x=\lim_{h\to0}\int_a^b\frac{f(x,t+h)-f(x,t)}{h}\mathrm{d}x.$$

由条件，存在 $0\leqslant\theta\leqslant1$，使

$$|f(x,t+h)-f(x,t)|=\left|\frac{\partial}{\partial t}f(x,t+\theta h)\cdot h\right|\leqslant hg(x),$$

于是据控制收敛定理，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x&=\int_a^b\lim_{h\to0}\frac{f(x,t+h)-f(x,t)}{h}\mathrm{d}x\\&=\int_a^b\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

例 4 试用控制收敛定理来证明积分的绝对连续性．

证 设 $f(x)$ 在 E 上可积，令

$$f_n(x)=\begin{cases}f(x), & |f(x)|\leqslant n,\\ n, & |f(x)|>n,\end{cases}$$

则 $|f_n(x)|\leqslant|f(x)|$，由于 (L) 可积函数必几乎处处有限，故 $|f_n(x)|\xrightarrow{\text{a.e.}}|f(x)|$，据 $L.D.C$，对任意的 $\varepsilon>0$，必存在自然数 N，使得当 $n\geqslant N$ 时，有

$$\int_E(|f(x)|-|f_n(x)|\mathrm{d}m<\frac{\varepsilon}{2}.$$

现在令 $\delta<\frac{\varepsilon}{2N}$，则当 $A\subset E$，$mA<\delta$ 时，

$$\left|\int_A f(x)\mathrm{d}m\right| \leqslant \int_A |f(x)|\mathrm{d}m$$

$$= \int_A (|f(x)| - |f_N(x)|)\mathrm{d}m + \int_A |f_N(x)|\mathrm{d}m$$

$$\leqslant \int_E (|f(x)| - |f_N(x)|\mathrm{d}m + N \cdot mA < \varepsilon.$$

例 5 计算广义黎曼积分

$$(CR)\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\mathrm{d}x.$$

解 当 $0<x<1$ 时

$$\frac{\ln(1-x)}{x} = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-x^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n},$$

令 $u_n(x) = \frac{x^{n-1}}{n}$，则

$$\frac{-\ln(1-x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x),$$

据(L)积分的逐项积分定理

$$(L)\int_0^1 \frac{-\ln(1-x)}{x}\mathrm{d}m = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 u_n(x)\mathrm{d}m = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

故

$$(CR)\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\mathrm{d}x = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

§3 微分和积分

本节的主要目的是应用勒贝格测度、勒贝格积分理论来研究积分和微分的关系．在数学分析中，微分和积分的互逆关系是通过两个基本定理表现出来的，这就是原函数存在定理及牛顿-莱布尼兹(Newton-Leibniz)公式，即

(1) 设 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的黎曼可积函数，且在 $x=x_0$ 处连续，则不定积分

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t, \quad x \in [a,b]$$

在 $x=x_0$ 处可微，且 $F'(x_0)=f(x_0)$.

(2) 设 $f(x)$是定义在$[a,b]$上的可微函数，且 $f'(x)$在$[a,b]$上是黎曼可积的，则

$$\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t = f(x) - f(a), \; x \in [a,b].$$

在本节中，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 均表示$[a,b]$上的勒贝格积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}m$，我们的目的是在勒贝格积分中推广上述结果.

首先我们讨论不定积分 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 的可微性问题，由于勒贝格积分$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = \int_a^x f_+(t)\mathrm{d}t - \int_a^x f_-(t)\mathrm{d}t$，而积分$\int_a^x f_+(t)\mathrm{d}t$ 和 $\int_a^x f_-(t)\mathrm{d}t$ 均是单调增加函数，因此，我们将从对单调函数的可微性讨论出发，引进囿变函数和绝对连续函数概念，证明牛顿-莱布尼兹公式成立的充要条件是 $f(x)$为绝对连续函数.

3.1 单调函数和囿变函数

设 $f(x)$是闭 $[a,b]$上的单调函数，我们容易证明单调函数 $f(x)$不连续点至多可列，下面将给出一个关于单调函数 $f(x)$的可微性定理.

定理 3.1 （勒贝格微分定理） 设 $f(x)$是定义在$[a,b]$上的单调函数，则 $f(x)$在$[a,b]$上几乎处处存在有限导数.

这是一个十分深刻的定理，证明比较复杂，此处从略，有兴趣的读者可参阅文献[6][7]等.

进一步，我们证明单调函数的导数是(L)可积的.

定理 3.2 设 $f(x)$是区间$[a,b]$上的增函数，则 $f'(x)$在$[a,b]$上(L)可积，且

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x \leqslant f(b) - f(a).$$

证　在$(b,b+1]$上补充定义$f(t)=f(b)$，对任何自然数n，作函数

$$\varphi_n(t) = \frac{f\left(t+\frac{1}{n}\right) - f(t)}{\frac{1}{n}},$$

显然$\varphi_n(t)\geqslant 0$，可测，且是$[a,b]$上的黎曼可积函数，当然也是勒贝格可积函数.

$$\begin{aligned}\int_a^b \varphi_n(t)\mathrm{d}t &= n\int_a^b \left(f\left(t+\frac{1}{n}\right) - f(t)\right)\mathrm{d}t \\ &= n\left[\int_b^{b+\frac{1}{n}} f(t)\mathrm{d}t - \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(t)\mathrm{d}t\right] \\ &\leqslant f(b) - f(a).\end{aligned}$$

因为$f'(t)$几乎处处存在有限，则据法杜定理

$$\begin{aligned}\int_a^b f'(t)\mathrm{d}t &= \int_a^b \lim_{n\to\infty}\varphi_n(t)\mathrm{d}t \leqslant \varliminf_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n(t)\mathrm{d}t \\ &\leqslant f(b) - f(a).\end{aligned}$$

单调增加函数虽然几乎处处有有限导数，且$f'(x)(L)$可积，但牛顿-莱布尼兹公式未必成立，即定理 3.2 中严格不等式可能成立.

例　设

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

虽然$f'(x)=0\ (x\neq 0)$，因此

$$\int_{-1}^1 f'(x)\mathrm{d}x = 0,$$

但$f(1)-f(-1)=1$，所以

$$\int_{-1}^1 f'(x)\mathrm{d}x < f(1) - f(-1).$$

定义 3.1 设 $f(x)$是定义在$[a,b]$上的有限函数，对$[a,b]$的任一分划 D：$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，记

$$v(f;D)=\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|,$$

称

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)=\sup_{D}v(f;D)$$

为 $f(x)$在$[a,b]$上的**总变分**(或**全变差**)；若 $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)<+\infty$，则称 $f(x)$为$[a,b]$上的**囿变函数**.

由定义 3.1 显然可知：$[a,b]$上的任何单调函数 f 是囿变函数，且总变分 $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)=|f(b)-f(a)|$；如果 f 在$[a,b]$上满足李普希兹条件，即存在常数 M，当 $x_1,x_2\in[a,b]$时，$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant M|x_1-x_2|$，则 $f(x)$是囿变函数.

定理 3.3 囿变函数具有下列性质：

(1) 设 f 在$[a,b]$上囿变，则 f 在$[a,b]$上必有界，

(2) 设 f 在$[a,b]$上囿变，则 f 在任一子区间$[a_1,b_1]$上也囿变，

(3) 设 f 分别在$[a,c]$，$[c,b]$上囿变，则 f 在$[a,b]$上也囿变，且有

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)=\overset{c}{\underset{a}{V}}(f)+\overset{b}{\underset{c}{V}}(f),$$

(4) 设 f,g 都是$[a,b]$上的囿变函数，α,β 是常数，则 $\alpha f+\beta g$，$f\cdot g$ 都是$[a.b]$上的囿变函数.

证 (1)，(2)显然成立，我们仅证明(3)和(4).

(3) 设 f 在$[a,c]$，$[c,b]$上均囿变，对$[a,c]$与$[c,b]$的任意分划

$$D_1:\ a=x_0<x_1<\cdots x_n=c,$$
$$D_2:\ c=y_0<y_1<\cdots<y_m=b,$$

显然有

$$\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|+\sum_{i=1}^{m}|f(y_i)-f(y_{i-1})|\leqslant\bigvee_a^b(f),$$

所以

$$\bigvee_a^c(f)+\bigvee_c^b(f)\leqslant\bigvee_a^b(f).$$

另一方面，对$[a,b]$的任一分划 D：$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，可设 $x_m\leqslant c<x_{m+1}(0\leqslant m\leqslant n-1)$，则

$$\begin{aligned}v(f;D)&=\sum_{k=1}^{m}|f(x_k)-f(x_{k-1})|+|f(x_{m+1})-f(x_m)|\\&\quad+\sum_{k=m+2}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|\\&\leqslant\Big(\sum_{k=1}^{m}|f(x_k)-f(x_{k-1})|+|f(c)-f(x_m)|\Big)\\&\quad+\Big(|f(x_{m+1})-f(c)|+\sum_{k=m+2}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})\Big)|\\&\leqslant\bigvee_a^c(f)+\bigvee_c^b(f).\end{aligned}$$

所以 f 是$[a,b]$上的囿变函数，且

$$\bigvee_a^b(f)=\bigvee_a^c(f)+\bigvee_c^b(f).$$

(4) 因为

$$\sum_{k=1}^{n}|\alpha f(x_k)+\beta g(x_k)-\alpha f(x_{k-1})-\beta g(x_{k-1})|$$

$$\leqslant|\alpha|\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|+|\beta|\sum_{k=1}^{n}|g(x_k)-g(x_{k-1})|,$$

所以 $\alpha f+\beta g$ 是$[a,b]$上的囿变函数.

对 $f\cdot g$，由于 f,g 囿变时一定有界，可设 $|f(x)|\leqslant M$，$|g(x)|\leqslant M$，$x\in[a,b]$，利用不等式

$$\begin{aligned}&|f(x_k)g(x_k)-f(x_{k-1})g(x_{k-1})|\\&\leqslant|f(x_k)g(x_k)-f(x_{k-1})g(x_k)|\\&\quad+|f(x_{k-1})g(x_k)-f(x_{k-1})g(x_{k-1})|\end{aligned}$$

立即知

$$\bigvee_a^b(fg) \leqslant M(\bigvee_a^b(f) + \bigvee_a^b(g)),$$

所以 $f \cdot g$ 是$[a,b]$上的囿变函数．

定理 3.4 （约当分解） $f(x)$是$[a,b]$上的囿变函数的充要条件是它可表成两个增函数之差．

证 充分性显然，现证必要性．设 $f(x)$是囿变函数，令

$$\pi(x) = \bigvee_a^x(f), \quad x \in [a,b],$$

则 $\pi(x)$非负单调上升，再令

$$v(x) = \pi(x) - f(x), \quad x \in [a,b],$$

下面证明 $v(x)$也是增函数．事实上，当 $\alpha<\beta$ 时，

$$\begin{aligned} v(\beta) - v(\alpha) &= \pi(\beta) - \pi(\alpha) - [f(\beta) - f(\alpha)] \\ &= \bigvee_a^\beta(f) - [f(\beta) - f(\alpha)]. \end{aligned}$$

因为$|f(\beta)-f(\alpha)| \leqslant \bigvee_\alpha^\beta(f)$，所以 $v(\beta) \geqslant v(\alpha)$，即 $v(x)$单调上升，于是就得到了定理所要求的分解：

$$f(x) = \pi(x) - v(x).$$

推论 设 $f(x)$在$[a,b]$上囿变，则 $f(x)$的不连续点至多可列；$f(x)$黎曼可积；$f'(x)$几乎处处存在有限，且 $f'(x)$勒贝格可积．

3.2 绝对连续函数和牛顿-莱布尼兹公式

设 $f(x)$是$[a,b]$上的勒贝格可积函数，则函数

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t, \ x \in [a,b]$$

显然是$[a,b]$上的连续囿变函数，利用(L)积分的绝对连续性，我们还可以得到 $F(x)$具有更强的连续性，即 $F(x)$是下面所定义的绝对连续函数．

定义 3.2 设 $f(x)$是$[a,b]$上的有限函数，如果对任意的 $\varepsilon>$

0，存在 $\delta>0$，使得当 $\{(a_k,b_k)\}$ 是 $[a,b]$ 上任意有限个互不相交的开区间，且总长度 $\sum_k(b_k-a_k)<\delta$ 时，有

$$\sum_k |f(b_k)-f(a_k)|<\varepsilon,$$

则称 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的**绝对连续函数**．

根据定义读者容易证明，绝对连续函数是连续的；绝对连续函数关于和、差、积、商（除函数不取零值）运算是封闭的．除此以外，我们还可以证明绝对连续函数必定是囿变函数，所以绝对连续函数几乎处处存在有限导数，且导函数是勒贝格可积的．

事实上，按照定义 3.2，取 $\varepsilon=1$，存在 $\delta_1>0$，使对任意有限个互不相交的区间 $\{(a_k,b_k)\}$，当 $\sum_k(b_k-a_k)<\delta_1$ 时，有

$$\sum_k |f(b_k)-f(a_k)|<1.$$

取自然数 N_1，使 $\frac{b-a}{N_1}<\delta_1$，将 $[a,b]$ N_1 等分，分点为 $a=x_0<x_1<\cdots<x_{N_1}=b$，对每个小区间 $[x_{k-1},x_k]$ 的分点组 Δ：$x_{k-1}=z_0<z_1<\cdots<z_n=x_k$，由上面可知 $\sum_{i=1}^{n}|f(z_i)-f(z_{i-1})|<1$，所以

$$\mathop{V}_{x_{k-1}}^{x_k}(f)\leqslant 1,$$

$$\mathop{V}_a^b(f)=\sum_{k=1}^{N_1}\mathop{V}_{x_{k-1}}^{x_k}(f)\leqslant N_1,$$

故 $f(x)$ 囿变．

为了证明绝对连续性是牛顿-莱布尼兹公式成立的充要条件，先建立一个重要引理．

引理 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数，且 $f'(x)\overset{\text{a.e.}}{=\!=}0$，则 $f(x)$ 为常数．

证 先证 $f(b)=f(a)$，任给 $\varepsilon>0$，因为 $f(x)$ 绝对连续，则存在 $\delta>0$，当 $\{(a_k,b_k)\}$ 是 $[a,b]$ 的任意个（有限或可列）总长度小于 δ

的互不相交开区间时,

$$\sum_{k}|f(b_k)-f(a_k)|<\varepsilon, \tag{3.1}$$

记 $E_0=\{x\in[a,b];\ f'(x)=0\}$,由假设 $m([a,b]-E_0)=0$,所以可取开集 $G\supset[a,b]-E_0$,使 $mG<\delta$. 现设 $\{(a_k,b_k)\}$ 为 G 的构成区间集合.

另一方面,当 $y\in[a,b]-G\subset E_0$ 时,$f'(y)=0$,所以存在正数 h_y,使得 $z\in(y-h_y,y+h_y)$ 时,有

$$\left|\frac{f(z)-f(y)}{z-y}\right|<\varepsilon, \tag{3.2}$$

这样,开区间族 $\{(a_k,b_k);k=1,2,3,\cdots\}\cup\{(y-h_y,y+h_y):y\in[a,b]-G\}$ 覆盖了 $[a,b]$,根据波雷尔有限覆盖定理,可以从中选出有限个来覆盖 $[a,b]$,设它们是

$$(a_1,b_1),\cdots,(a_m,b_m),\ (y_1-h_1,y_1+h_1),\cdots,(y_l-h_l,y_l+h_l),$$

显然,可以在集合 $\{a_i,b_i,\ y_j:\ i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,l\}$ 中加入适当的分点,使其全体构成 $[a,b]$ 的一个分点组:

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

并且使得任何 (x_{k-1},x_k) 必属于以下三种情况之一:

(1) 包含在某 (a_i,b_i) 之中,

(2) $x_{k-1}=y_j$,且 $(x_{k-1},x_k)\subset(y_j,y_j+h_j)$,

(3) $x_k=y_j$,且 $(x_{k-1},x_k)\subset(y_j-h_j,y_j)$.

由此可得

$$|f(b)-f(a)|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|$$

$$\leqslant\sum{}'|f(x_k)-f(x_{k-1})|-\sum{}''|f(x_k)-f(x_{k-1})|,$$

其中 $\sum'$ 表示对(1)形式的 (x_{k-1},x_k) 求和,$\sum''$ 表示对(2),(3)形式的 (x_{k-1},x_k) 求和,按照(3.1),(3.2)可得

$$\sum{}'|f(x_k)-f(x_{k-1})|<\varepsilon,$$

和

$$\sum{}'' |f(x_k) - f(x_{k-1})| < \varepsilon \sum{}'' (x_k - x_{k-1}) \leqslant \varepsilon(b-a),$$

所以

$$|f(b) - f(a)| < \varepsilon(b - a + 1).$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性,得 $f(b)=f(a)$.

对任一 $x\in[a,b]$,只要用$[a,x]$代替$[a,b]$作如上讨论,便得 $f(x)=f(a)$,因此,$f(x)$在$[a,b]$上恒等于常数.

定理 3.5 设 $f(x)$为区间$[a,b]$上的勒贝格可积函数,则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \xlongequal{\text{a. e.}} f(x),\ x \in [a.b].$$

证 对任意的 $\varepsilon>0$,由本章 §1 定理 1.7 存在连续函数 $\varphi(x)$,使得

$$\int_a^b |f(x) - \varphi(x)| \mathrm{d}x < \varepsilon.$$

对连续函数 $\varphi(x)$,显然有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x \varphi(t)\mathrm{d}t = \varphi(x),\ x \in [a,b].$$

现在作估计

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t - f(x) \right| \mathrm{d}x \\
=&\int_a^b \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x (f(t) - \varphi(t))\mathrm{d}t + \varphi(x) - f(x) \right| \mathrm{d}x \\
\leqslant&\int_a^b \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x (f(t) - \varphi(t)\mathrm{d}t \right| \mathrm{d}x + \int_a^b |f(x) - \varphi(x)| \mathrm{d}x \\
=&\int_a^b \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x g(t)\mathrm{d}t \right| \mathrm{d}x + \int_a^b |g(t)| \mathrm{d}t,
\end{aligned} \tag{3.3}$$

其中 $g(t)=f(t)-\varphi(t)$. 为了估计上式右端第一个积分,首先证明

$$\int_a^b \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x g(t)\mathrm{d}t \right| \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b |g(t)| \mathrm{d}t.$$

因为 $\int_a^x g_+ (t)\mathrm{d}t$ 和 $\int_a^x g_- (t)\mathrm{d}t$ 均为上升函数,导数几乎处处存在有

限，所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x g(t)\mathrm{d}t \xlongequal{\text{a.e.}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x g_+(t)\mathrm{d}t - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x g_-(t)\mathrm{d}t.$$

再利用本节定理 3.2，即得

$$\begin{aligned}\int_a^b\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\right|\mathrm{d}x &\leqslant \int_a^b\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x g_+(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x \\ &\quad + \int_a^b\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x g_-(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_a^b g_+(t)\mathrm{d}t + \int_a^b g_-(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b |g(t)|\mathrm{d}t,\end{aligned} \tag{3.4}$$

将(3.4)代入(3.3)，得

$$\int_a^b\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t - f(x)\right|\mathrm{d}x \leqslant 2\int_a^b |f(x)-\varphi(x)|\mathrm{d}x < 2\varepsilon,$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性，知

$$\int_a^b\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t - f(x)\right|\mathrm{d}x = 0,$$

故 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \xlongequal{\text{a.e.}} f(x)$.

利用引理和定理 3.5 立即得到

定理 3.6 设 $f(x)$是$[a,b]$上的有限可测函数，则牛顿-莱布尼兹公式

$$f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t,\ x\in[a,b]$$

成立的充要条件是 $f(x)$为绝对连续函数.

证 必要性由积分的绝对连续性立即得到.

充分性：设 $f(x)$绝对连续，则 $f'(x)$勒贝格可积，作函数

$$\varphi(x)=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t,$$

显然 $\varphi(x)$绝对连续，且按定理 3.5，有 $\varphi'(x)\xlongequal{\text{a.e.}}f'(x)$，故若令 $\psi(x)=f(x)-\varphi(x)$，则 $\psi(x)$是绝对连续函数，且

$$\psi'(x) \xlongequal{\text{a.e.}} 0,$$

于是由引理知 $\psi(x)\equiv\psi(a)=f(a)$，这就是

$$f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t.$$

例 1 设 $f(x)$是$[a,b]$上的囿变函数，试证明 $f(x)$绝对连续的充要条件是 $\pi(x)=\overset{x}{\underset{a}{V}}(f)$是绝对连续函数．

证 必要性：设 f 绝对连续，则对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $\{(a_k,b_k)\}$是$[a,b]$的有限个互不相交的开区间，且$\sum\limits_k(b_k-a_k)<\delta$ 时，

$$\sum_k|f(b_k)-f(a_k)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

对$[a_k,b_k]$作分划：$a_k=x_0^{(k)}<x_1^{(k)}<\cdots<x_{n_k}^{(k)}=b_k$，使

$$\overset{b_k}{\underset{a_k}{V}}(f)\leqslant\sum_j|f(x_j^{(k)})-f(x_{j-1}^{(k)})|+\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.$$

因为 $\sum\limits_k\sum\limits_j(x_j^{(k)}-x_{j-1}^{(k)})=\sum\limits_k(b_k-a_k)<\delta$，所以

$$\sum_k\sum_j|f(x_j^{(k)})-f(x_{j-1}^{(k)})|<\frac{\varepsilon}{2},$$

$$\sum_k|\pi(b_k)-\pi(a_k)|=\sum_k\overset{b_k}{\underset{a_k}{V}}(f)$$

$$\leqslant\sum_k\sum_j|f(x_j^{(k)}-f(x_{j-1}^{(k)})|+\sum_k\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}<\varepsilon.$$

故 $\pi(x)$是绝对连续的．

充分性：设 $\pi(x)=\overset{x}{\underset{a}{V}}(f)$绝对连续，对任意的 $\varepsilon>0$，取 $\delta>0$，使当$\{(a_k,b_k)\}$是$[a,b]$的有限个互不相交的小区间，且$\sum\limits_k(b_k-a_k)<\delta$ 时，

$$\sum_k|\pi(b_k)-\pi(a_k)|<\varepsilon,$$

即

$$\sum_k \overset{b_k}{\underset{a_k}{V}}(f) < \varepsilon.$$

注意到$|f(b_k)-f(a_k)| \leqslant \overset{b_k}{\underset{a_k}{V}}(f)$，所以

$$\sum_k |f(b_k) - f(a_k)| \leqslant \sum_k \overset{b_k}{\underset{a_k}{V}}(f) < \varepsilon,$$

从而 $f(x)$是绝对连续的.

例 2 设 $f(x)$,$g(x)$都是$[a,b]$上的绝对连续函数,则分部积分公式成立:

$$\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}m + \int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}m = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

证 由条件知 $f(x)g(x)$绝对连续,且

$$(f(x)g(x))' \overset{\text{a.e.}}{=\!=} f(x)g'(x) + f'(x)g(x).$$

易知$\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}m$，$\int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}m$ 存在、有限,所以

$$\int_a^b (f(x)g(x))'\mathrm{d}m = \int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}m + \int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}m.$$

又对于绝对连续函数 $f(x)g(x)$,成立牛顿-莱布尼兹公式,故

$$\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}m + \int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}m = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

例 3 设 $f(x)$是$[a,b]$上的绝对连续函数,试证明

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \int_a^b |f'(t)|\mathrm{d}t.$$

证 对$[a,b]$的任一分划 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$,

$$\sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^n \left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f'(t)|\mathrm{d}t,$$

从而有

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) \leqslant \int_a^b |f'(t)|\mathrm{d}t.$$

反之,令 $\delta_n=\dfrac{b-a}{n}$,$t_k=a+k\delta_n(k=0,1,2,\cdots)$. $e_k=[t_{k-1},t_k)$,对每个自然数 n,定义简单函数 $f_n(x)$如下:

$$f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\delta_n}[f(t_k)-f(t_{k-1})], & x\in e_k(k=1,2,\cdots,n)\\ f(b), & x=t_n=b\end{cases}$$

则容易证明 $f_n(x)\xrightarrow{\text{a.e.}}f'(x)$，于是按照法杜定理可得

$$\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}m\leqslant\overset{b}{\underset{a}{V}}(f),$$

故

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)=\int_a^b|f'(t)|\mathrm{d}t.$$

* § 4　抽象测度与积分·富比尼定理

设 X 是任一集合，$\mathscr{A}$ 是 X 的一个 σ 代数．本节我们将给出构造抽象测度 μ 的一个标准技巧，利用这个方法可以得到 R（或 R^n）上的 Lebesgue 测度，同时，我们介绍了 μ 可测函数和 μ 积分概念，讨论了乘积空间上的乘积测度和关于交换积分次序的富比尼定理．

4.1　σ 代数上的测度及其初等性质

我们在第八章§3中已介绍了一个集合 X 的子集类 $\mathscr{A}$ 为 σ 代数是指 $\mathscr{A}$ 要满足条件：(1) $X\in\mathscr{A}$，(2) 若 $A,B\in\mathscr{A}$，则 $A\cup B,A-B\in\mathscr{A}$，(3) 若 $A=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$，$A_i\in\mathscr{A}(i=1,2,3,\cdots)$，则 $A\in\mathscr{A}$.

易知条件(2)中 $A-B\in\mathscr{A}$ 可换成 $\mathscr{C}A\in\mathscr{A}$；又若 $A=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$，$A_i\in\mathscr{A}(i=1,2,3,\cdots)$，则 $A\in\mathscr{A}$.

例如(1)若 $\mathscr{A}$ 是 X 的一切子集组成的集族，则 $\mathscr{A}$ 是 X 上的一个 σ 代数．

(2) 令 $\mathscr{A}=\{\varnothing,X\}$，则 $\mathscr{A}$ 是一个 σ 代数．

(3) 设 $X=R$，$\mathscr{A}$ 是形如$(a,b]$，$(a,+\infty)$或者$(-\infty,b]$的有限多个区间之并和空集$\varnothing$组成，则 $\mathscr{A}$ 是 R 的一个代数，但 $\mathscr{A}$ 不是一个 σ 代数．因为有界开区间(a,b)是 $\mathscr{A}$ 中可列个元素之并，所$(a,b)\overline{\in}\mathscr{A}$.

设 X 是一个集合，$\mathscr{F}$ 是 X 的子集族．按第八章定理 3.3，存在唯一的一个 X 的包含 $\mathscr{F}$ 的最小 σ 代数，记作 $\sigma(\mathscr{F})$，称作由 $\mathscr{F}$ 生成的 σ 代数；由 R^n 中开子集族生成的 σ 代数称作 R^n 的 Borel σ 代数，记为 $\mathscr{B}(R^n)$，$\mathscr{B}(R^n)$中的集合称作 R^n 中的 Borel 集，$n=1$ 时，记为 $\mathscr{B}(R)$.

定理 4.1 R 中 Borel σ 代数 $\mathscr{B}(R)$也是下列集族之一生成的 σ 代数：

(1) 所有闭子集，

(2) 所有形如$(-\infty,b]$子区间全体，

(3) 所有形如$(a,b]$子区间全体．

证 我们用 $\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_3$ 分别表示由集族(1)，(2)，(3)生成的 σ 代数，首先证明 $\mathscr{B}(R)\supset\mathscr{B}_1\supset\mathscr{B}_2\supset\mathscr{B}_3$，然后证明 $\mathscr{B}_3\supset\mathscr{B}(R)$.

因为 $\mathscr{B}(R)$中包含 R 的一切开子集，且关于求补运算封闭，因此 $\mathscr{B}(R)$是包含一切闭子集的 σ 代数，故 $\mathscr{B}(R)\supset\mathscr{B}_1$.

由于$(-\infty,b]$是 R 中的闭子集，故$(-\infty,b]\in\mathscr{B}_1$，这就可得到

$$\mathscr{B}_2\subset\mathscr{B}_1.$$

因为$(a,b]=(-\infty,b]\cap(R-(-\infty,a])$．所以$(a,b]\in\mathscr{B}_2$，从而

$$\mathscr{B}_3\subset\mathscr{B}_2.$$

最后，由于开区间$(a,b)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(a,b-\frac{1}{n}\right]\in\mathscr{B}_3$，则每个开集 $G\in\mathscr{B}_3$，从而

$$\mathscr{B}(R)\subset\mathscr{B}_3.$$

同理，我们可以证明 $\mathscr{B}(R^n)$也是由下列集族之一生成的 σ 代

数：

(a) R^n 中的闭子集全体，

(b) 一切形如$\{(x_1,x_2,\cdots,x_n): x_i\leqslant b$,对某一个指标 i 和实数 $b\}$的集合，

(c) 一切形如$\{(x_1,x_2,\cdots,x_n): a_i<x_i\leqslant b_i,\ i=1,2,\cdots,n\}$的集合.

定理 4.2 设 $\mathscr{A}$ 则 X 的一个代数,若下列两条件之一成立：

(1) $\mathscr{A}$ 关于递增集合序列之并封闭，

(2) $\mathscr{A}$ 关于递减集合序列之交封闭，

则 $\mathscr{A}$ 是一个 σ 代数.

证 (1) 设 $A_i\in\mathscr{A}$, $i=1,2,3,\cdots$, $A=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$, 令 $B_n=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$, 则 B_n 递增,且 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i=A$, $B_n\in\mathscr{A}$, 故 $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n\in\mathscr{A}$, $\mathscr{A}$ 是一个 σ 代数.

(2) 任取 $\mathscr{A}$ 中递增集合序列$\{A_i\}$, 则$\{\mathscr{C}A_i\}$是 $\mathscr{A}$ 中递减集合序列,据(2) $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}(\mathscr{C}A_i)\in\mathscr{A}$, 则

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=\mathscr{C}(\bigcap_{i=1}^{\infty}\mathscr{C}A_i)\in\mathscr{A},$$

故条件(1)成立,从而 $\mathscr{A}$ 是一个 σ 代数.

定义 4.1 设 $\mathscr{A}$ 是 X 上的一个 σ 代数,若函数 $\mu:\mathscr{A}\to[0,+\infty]$满足条件：

(1) $\mu(\varnothing)=0$,

(2) 若 $A_i\in\mathscr{A}$, $A_i\cap A_j=\varnothing$, $i\neq j$, $i,j=1,2,3,\cdots$,则

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i),$$

则称 μ 是 $\mathscr{A}$ 上的一个**测度**, 称$(X,\mathscr{A},\mu)$为**测度空间**.

一般地,也称$(X,\mathscr{A})$**为可测空间**,$\mathscr{A}$ **中元素称为可测集**.

注 如果 $\mu:\mathscr{A}\to[-\infty,+\infty)$(或$(-\infty,+\infty]$)且满足定义4.1 中条件(1), (2), 则称 μ 为**广义测度**；如果 μ 允许取复数值，

则称 μ 为**复测度**.

例如：

(a) 若 $A\in\mathscr{A}$ 为有限集，n 为 A 的元素个数，规定 $\mu(A)=n$，若 $A\in\mathscr{A}$ 为无穷集，规定 $\mu(A)=+\infty$，则 μ 为 $(X,\mathscr{A})$ 上的一个**计数测度**.

(b) $x\in X$，定义函数 $\delta_x:\mathscr{A}\to[0,+\infty]$ 如下：$A\in\mathscr{A}$，

$$\delta_x(A)=\begin{cases}1, & 若\ x\in A,\\ 0, & 若\ x\overline{\in} A,\end{cases}$$

则 δ_x 是一个测度(称作集中于 x 的点质量).

定理 4.3 (测度的初等性质) 设 $(X,\mathscr{A},\mu)$ 是一个测度空间，则

(1) 单调性：若 $A,B\in\mathscr{A}$，$A\subset B$，则 $\mu(A)\leqslant\mu(B)$；又若 $\mu(A)<+\infty$，则

$$\mu(B-A)=\mu(B)-\mu(A),$$

(2) 次可数可加性：设每个 $A_k\in\mathscr{A}$，$k=1,2,3,\cdots$，则

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\mu(A_k),$$

(3) 设 $\{A_n\}$ 是 $\mathscr{A}$ 中的递增集合序列，则

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n),$$

(4) 设 $\{A_n\}$ 是 $\mathscr{A}$ 中递减集合序列，且存在 n_0，使 $\mu(A_{n_0})<+\infty$，则

$$\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n).$$

本定理的证明同第八章中 Lebesgue 测度 m 的性质，故略.

设 μ 是 $(X,\mathscr{A})$ 上的一个测度，若 $\mu(X)<+\infty$，则称 μ 是**有限测度**；若 $X=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$，$A_i\in\mathscr{A}$，且 $\mu(A_i)<+\infty$，$i=1,2,3,\cdots$，则称 μ 为 **σ 有限测度**.

4.2 外测度和勒贝格测度

定义 4.2 设 X 是一个集合，$\mathscr{P}(X)$是 X 的所有子集组成的集族，如果函数 $\mu^*:\mathscr{P}(X)\to[0,+\infty]$满足：

(1) $\mu^*(\varnothing)=0$，

(2) 单调性：若 $A\subset B\subset X$，则 $\mu^*(A)\leqslant\mu^*(B)$，

(3) 次可数可加性：$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(A_n)$，

则称 μ^* 为 X 的一个**外测度**.

例如：

(a) $\mu^*:\mathscr{P}(X)\to[0,+\infty]$定义如下：

$$\mu^*(A)=\begin{cases}0, & A=\varnothing,\\ 1, & A\neq\varnothing,\end{cases}$$

则 μ^* 是一个外测度.

(b) 设 X 是一无穷集合，规定

$$\mu^*(A)=\begin{cases}0, & A\text{ 为有限集},\\ 1, & A\text{ 为无限集},\end{cases}$$

令 $A=\{a_n\}(n=1,2,3,\cdots)$，则 $\mu^*(a_n)=0$，$\mu^*(A)=1$，$\mu^*(A)>\sum_{n=1}^{\infty}\mu(a_n)$，$\mu^*$ 不具有次可数可加性，故 μ^* 不是一个外测度.

(c) R 上的 Lebesgue 外测度 m^* 定义如下：$A\subset R$，令

$$m^*(A)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}(b_i-a_i):\bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i)\supset A\right\}.$$

定义 4.3 设 μ^* 是 X 上的一个外测度，子集 $E\subset X$ 称作 μ^* **可测的**，如果对一切 $A\subset X$ 成立

$$\mu^*(A)=\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap\mathscr{C}E). \tag{4.1}$$

利用 μ^* 的次可加性，定义 4.3 中(4.1)式等价于

$$\mu^*(A)\geqslant\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap\mathscr{C}E),\ \forall\ A\subset X, \tag{4.2}$$

又若 $\mu^*(A)=+\infty$，则(4.2)显然成立，故(4.2)只要对 $\mu^*(A)<+\infty$的集合 A 成立即可.

例 1 设 μ^* 是 X 上的一个外测度，$E\subset X$，若 $\mu^*(E)=0$ 或者 $\mu^*(\mathscr{C}E)=0$，则 E 是 μ^* 可测的．

证 设 $\mu^*(E)=0$（或 $\mu^*(\mathscr{C}E)=0$），由 μ^* 的单调性，(4.2) 等价于

$$\mu^*(A)\geqslant\mu^*(A\cap\mathscr{C}E)\quad(\text{或 }\mu^*(A)\geqslant\mu^*(A\cap E)),$$

由于 $A\cap E, A\cap\mathscr{C}E\subset A$，再利用 μ^* 的单调性知

$$\mu^*(A)\geqslant\mu^*(A\cap\mathscr{C}E)\ (\text{或 }\mu^*(A)\geqslant\mu^*(A\cap E)),$$

故(4.1)成立，即 E 是 μ^* 可测的．

定理 4.4 设 μ^* 是 X 上的一个外测度，用 M_{μ^*} 表示 X 的所有 μ^* 可测子集，则

(1) M_{μ^*} 是一个 σ 代数，

(2) μ^* 限制在 M_{μ^*} 上是 M_{μ^*} 上的一个测度．

证 由例 1 知空集 $\varnothing$ 和 X 本身都是 μ^* 可测的，即 $X\in M_{\mu^*}$，若 $E\in M_{\mu^*}$，则对一切 $A\subset X$，有

$$\mu^*(A)=\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap\mathscr{C}E),$$

即

$$\mu^*(A)=\mu^*(A\cap\mathscr{C}E)+\mu^*(A\cap\mathscr{C}(\mathscr{C}E)),$$

故 $\mathscr{C}E\in M_{\mu^*}$．

设 $E_1,E_2\in M_{\mu^*}$，我们证明 $E_1\cup E_2\in M_{\mu^*}$．任取 $A\subset X$，因为 $E_1\in M_{\mu^*}$，则

$$\begin{aligned}\mu^*(A\cap(E_1\cup E_2))&=\mu^*(A\cap(E_1\cup E_2)\cap E_1)\\&\quad+\mu^*(A\cap(E_1\cup E_2)\cap\mathscr{C}E_1)\\&=\mu^*(A\cap E_1)+\mu^*(A\cap\mathscr{C}E_1\cap E_2),\end{aligned}$$

又因为 $\mathscr{C}(E_1\cup E_2)=\mathscr{C}E_1\cap\mathscr{C}E_2$，$E_2\in M_{\mu^*}$，则

$$\begin{aligned}&\mu^*(A\cap(E_1\cup E_2))+\mu^*(A\cap(\mathscr{C}(E_1\cup E_2)))\\&=\mu^*(A\cap E_1)+\mu^*(A\cap\mathscr{C}E_1\cap E_2)\\&\quad+\mu^*(A\cap\mathscr{C}E_1\cap\mathscr{C}E_2)\\&=\mu^*(A\cap E_1)+\mu^*(A\cap\mathscr{C}E_1)=\mu^*(A),\end{aligned}$$

即 $E_1 \cup E_2 \in M_{\mu^*}$，$M_{\mu^*}$ 是一个代数．

现设 $\{E_i\}$ 是 M_{μ^*} 中不相交的集合序列，由归纳法可得

$$\mu^*(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A \cap E_i) + \mu^*(A \cap (\bigcap_{i=1}^{n} \mathscr{C}E_i)), \quad (4.3)$$

对所有 $A \subset X, n=1,2,3,\cdots$ 成立．

事实上，$n=1$ 时，(4.3)显然成立，设 $k=n$ 时(4.3)成立，考察 $k=n+1$，注意到 $E_{n+1} \in M_{\mu^*}$，$\{E_i\}$ 互不相交，则

$$\begin{aligned}\mu^*(A \cap (\bigcap_{i=1}^{n} \mathscr{C}E_i)) &= \mu^*(A \cap (\bigcap_{i=1}^{n} \mathscr{C}E_i) \cap E_{n+1}) \\ &\quad + \mu^*(A \cap (\bigcap_{i=1}^{n+1} \mathscr{C}E_i)) \\ &= \mu^*(A \cap E_{n+1}) + \mu^*(A \cap (\bigcap_{i=1}^{n+1} \mathscr{C}E_i)).\end{aligned}$$

据 $k=n$ 时，(4.3)成立，并利用上式可得

$$\begin{aligned}&\mu^*(A) - \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A \cap E_i) \\ &= \mu^*(A \cap E_{n+1}) + \mu^*(A \cap (\mathscr{C} \bigcup_{i=1}^{n+1} E_i)).\end{aligned}$$

这就证明了(4.3)对 $k=n+1$ 成立，在(4.3)式中用 $\mu^*(A \cap (\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathscr{C}E_i)) = \mu^*(A \cap (\mathscr{C} \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i))$ 来代替 $\mu^*(A \cap (\bigcap_{i=1}^{n} \mathscr{C}E_i)) = \mu^*(A \cap (\mathscr{C} \bigcup_{i=1}^{n} E_i))$ 得不等式

$$\mu^*(A) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A \cap E_i) + \mu^*(A \cap (\mathscr{C} \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i)) \quad (\forall\, n),$$

再令 $n \to \infty$，得

$$\mu^*(A) \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_i) + \mu^*(A \cap (\mathscr{C} \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i)), \quad (4.4)$$

所以

$$\mu^*(A) \geqslant \mu^*(A \cap (\bigcup_{j=1}^{\infty} E_i)) + \mu^*(A \cap (\mathscr{C} \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i)),$$

从而 $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in M_{\mu^*}$．对 M_{μ^*} 中任一集合序列 $\{E_i\}$，令

$$B_1 = E_1,\ B_2,\ = E_2 - E_1, \cdots, B_n = E_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} E_i,$$

则$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_i$，且$\{B_n\}$互不相交，每个$B_n \in M_{\mu^*}$，故$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in M_{\mu^*}$，$M_{\mu^*}$是一个$\sigma$代数．

最后证明μ^*限制在M_{μ^*}上是一个测度，即证明μ^*在M_{μ^*}上具有可数可加性．任取$\{E_i\} \subset M_{\mu^*}$，$E_i$互不相交，在不等式(4.4)中用$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$代替$A$就可得

$$\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i),$$

但据μ^*的次可数可加性

$$\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i),$$

故

$$\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i).$$

$E \in M_{\mu^*}$，E的测度记作$\mu(E) = \mu^*(E)$．如果用M_{m^*}表示R的 Lebesgue 可测子集全体，$A \in M_{m^*}$，A的测度记为$m(A)$，我们知道$\mathscr{B}(R) \subset M_{m^*}$．

例 2　设$g(x)$是定义在R上的实右连续增函数，$A \subset R$，规定

$$\mu^*(A) = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (g(b_i - 0) - g(a_i)) : \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i) \supset A \right\},$$

则类似于第八章定理 1.2 我们可以证明μ^*是R上的一个外测度，且使$A = [a, b]$时

$$\mu^*(A) = g(b) - g(a - 0).$$

事实上，μ^*的单调性和$\mu^*(\varnothing) = 0$显然，设$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$，为了书写方便起见，对开区间$I = (a, b)$，记

$$g(b - 0) - g(a) = \mu(I).$$

任给$\varepsilon > 0$，由μ^*的定义，对每个i，存在开区间列$\{I_{ij}\}$ $(j = 1, 2, 3, \cdots)$，使

$$\sum_{j=1}^{\infty}\mu I_{ij} \leqslant \mu^* A_i + \frac{\varepsilon}{2^i},$$

于是

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset \bigcup_{i,j=1}^{\infty} I_{ij},$$

且

$$\sum_{i,j=1}^{\infty}\mu I_{ij} = \sum_{i}\sum_{j}\mu I_{ij} \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}(\mu^*(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i})$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(A_i) + \varepsilon,$$

则

$$\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(A_i) + \varepsilon.$$

由于 $\varepsilon>0$ 是任意的，所以

$$\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(A_i).$$

下面证明 $A=[a,b]$ 时，$\mu^*(A)=g(b)-g(a-0)$. 首先，由于 $g(x)$ 为右连续增函数，$\left(a-\frac{1}{n},\ b+\frac{1}{n}\right)\supset[a,b]$，按 $\mu^*(A)$ 的定义知

$$\mu^*(A) \leqslant g(b) - g(a-0).$$

另一方面，任取 $\bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i)\supset[a,b]$，据有限覆盖定理，存在自然数 n，使 $\bigcup_{i=1}^{n}(a_i,b_i)\supset[a,b]$，不妨设 $b_n>b$，$a_1<a$，$a_i<b_{i-1}$，$i=2,3,\cdots,n$，则 $g(b_n-0)\geqslant g(b)$，$g(a_1)\leqslant g(a-0)$，

$$\sum_{i=1}^{\infty}(g(b_i-0)-g(a_i)) \geqslant \sum_{i=1}^{n}(g(b_i-0)-g(a_i))$$
$$\geqslant g(b_n-0)-g(a_1)$$
$$\geqslant g(b)-g(a-0),$$

从而

$$\mu^*(A) \geqslant g(b) - g(a-0).$$

这样就证明了 $\mu^*(A)=g(b)-g(a-0)$.

我们称由例 2 定义的外测度 μ^* 产生的测度为 **L-S 测度**．我们还可以证明 $\mathscr{B}(R)\subset M_{\mu^*}$．

对于 L-S 测度 μ，如果 $a=\{\alpha\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[\alpha-\frac{1}{n},\ \alpha+\frac{1}{n}\right]$，则

$$\begin{aligned}\mu(\{\alpha\}) &=\lim_{n\to\infty}\left[g\left(\alpha+\frac{1}{n}\right)-g\left(\alpha-\frac{1}{n}-0\right)\right]\\ &=g(\alpha)-g(\alpha-0),\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\mu((\alpha,\beta]) &=\mu([\alpha,\beta])-\mu(\{\alpha\})=g(\beta)-g(\alpha),\\ \mu((\alpha,\beta)) &=g(\beta-0)-g(\alpha),\\ \mu([\alpha,\beta)) &=g(\beta-0)-g(\alpha-0).\end{aligned}$$

特别地，当 $g(x)=x$ 时，这个 L-S 测度就是 Lebesgue 测度．

4.3 可测函数与 μ 积分

设 X 为任一集合，$\mathscr{A}$ 是 X 上的一个 σ 代数，我们称 $(X,\mathscr{A})$ 为可测空间，如果 μ 是 $\mathscr{A}$ 上的一个测度，则称 $(X,\mathscr{A},\mu)$ 为测度空间，类似于 Lebesgue 可测函数我们定义可测函数如下．

定义 4.4 设 $(X,\mathscr{A})$ 是可测空间，$E\in\mathscr{A}$，称函数 $f:E\to[-\infty,+\infty]$ 关于 $\mathscr{A}$ 是可测的，若下列条件之一成立：

(1) 对任一实数 α，$E(f>\alpha)\in\mathscr{A}$，

(2) 对任一实数 α，$E(f\geqslant\alpha)\in\mathscr{A}$，

(3) 对任一实数 α，$E(f<\alpha)\in\mathscr{A}$，

(4) 对任一实数 α，$E(f\leqslant\alpha)\in\mathscr{A}$．

定义 4.4 中条件(1)—(4)的等价性显然．如果取 $X=R$，$\mathscr{A}=\mathscr{B}(R)$，则称 $\mathscr{A}$ 可测函数 f 为 Borel 可测函数；又若 μ 为 $\mathscr{A}$ 上的一个测度，则称 $\mathscr{A}$ 可测函数为 **μ 可测函数**．

定理 4.5 设 $X=R$，$(R,\mathscr{A})$ 是可测空间，$E\in\mathscr{A}$，$f:E\to(-\infty,+\infty)$，则下列条件等价；

(1) f 是 $\mathscr{A}$ 可测的，

(2) 对任一开集 $V\subset R$，$f^{-1}(V)\in\mathscr{A}$，

(3) 对任一闭集 $F\subset R$，$f^{-1}(F)\in\mathscr{A}$，

(4) 对任一 $B\in\mathscr{B}(R)$，$f^{-1}(B)\in\mathscr{A}$.

证 由(4)⇒(2)，(4)⇒(3)以及(2)或(3)⇒(1)是显然的，故只要证明(1)⇒(4). 令

$$\mathscr{F}=\{B\subset R: f^{-1}(B)\in\mathscr{A}\},$$

证明 $\mathscr{F}$ 是 R 上的一个 σ 代数，且包含形如 $(-\infty,b]$ 这样的区间. 因为 $f^{-1}(R)=E\in\mathscr{A}$，所以 $R\in\mathscr{F}$，由 $f^{-1}(\mathscr{C}B)=E-f^{-1}(B)$ 可知 $B\in\mathscr{F}$ 时，$\mathscr{C}B\in\mathscr{F}$，由 $f^{-1}(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}f^{-1}(E_n)$ 以及 $\mathscr{A}$ 是一个 σ 代数，若每一个 $E_n\in\mathscr{F}$，则必有 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n\in\mathscr{F}$，因此 $\mathscr{F}$ 是一个 σ 代数. 又因为 f 是 $\mathscr{A}$ 可测的，由定义 4.4 知，$f^{-1}((-\infty,b])\in\mathscr{A}$，故 $(-\infty,b]\in\mathscr{F}$，从而 $\mathscr{B}(R)\subset\mathscr{F}$，即(4)成立.

类似于 Lebesgue 可测函数的性质，对 $\mathscr{A}$ 可测(μ 可测)函数同样成立. 特别地，设有测度空间 $(X,\mathscr{A},\mu)$，$E\in\mathscr{A}$，$f: E\to[0,+\infty]$ μ 可测，则存在 E 上的非负上升的简单函数序列 $\{\varphi_n(x)\}$，$0\leqslant\varphi_1(x)\leqslant\varphi_2(x)\leqslant\cdots\leqslant\varphi_n(x)\leqslant\cdots$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)=f(x)$，这里简单函数 $\varphi_n(x)$ 的构造方法同第九章 §1 中介绍的.

完全相同地，我们可以定义 μ 可测函数关于测度 μ 的积分.

定义 4.5 (μ-积分) 设 $(X,\mathscr{A},\mu)$ 为测度空间，$E\in\mathscr{A}$，

(1) 设 $\varphi(x)$ 为非负简单函数，$\varphi(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{A_i}(x)$，其中 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=E$，$A_i$ 互不相交，则规定

$$\int_E\varphi(x)\mathrm{d}\mu=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu(A_i),$$

这里约定 $0\cdot+\infty=+\infty\cdot 0=0$，

(2) 设 $f(x)\geqslant 0$，μ 可测，则规定

$$\int_E f(x)\mathrm{d}\mu=\sup_{0\leqslant\varphi\leqslant f}\int_E\varphi\,\mathrm{d}\mu\qquad(\text{有限或}+\infty),$$

当右边的值为有限时，称 $f(x)$ 为 μ **可积**. 否则就说 $f(x)$ 的积分

值为$+\infty$；

(3) 设 $f(x)$ μ 可测，则规定

$$\int_E f \mathrm{d}\mu = \int_E f_+ \,\mathrm{d}\mu - \int_E f_- \,\mathrm{d}\mu,$$

当右边两个积分均有限时，称 f 为 μ **可积**，记作 $f \in L(\mu)$.

μ 可积函数的性质完全与(L)可积函数的性质相同，特别地，对 μ 可积函数，勒维定理、逐项积分定理、法杜定理以及控制收敛定理均成立，所有 μ 可积函数性质的证明以及积分序列极限定理的证明也与(L)积分相同，这里从略．

例 3 设$(X, \mathscr{A}, \mu)$是一个测度空间，$f: X \to [0, +\infty]$是 μ 可测的，对每个 $E \in \mathscr{A}$，令

$$\upsilon(E) = \int_E f \mathrm{d}\mu,$$

υ 是 $\mathscr{A}$ 上的一个测度．

证 设 $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$，$E_i$ 互不相交，$\chi_E \cdot f = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{E_j} f$，

$$\upsilon(E) = \int_X \chi_E f \mathrm{d}\mu, \quad \upsilon(E_j) = \int_X \chi_{E_j} f \mathrm{d}\mu.$$

因为 $f \geqslant 0$，由逐项积分定理，立即得

$$\upsilon(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \upsilon(E_j).$$

由 $\upsilon(E)$的定义，$\upsilon(\varnothing) = 0$，故 υ 是一个测度．

4.4 乘积测度和富比尼定理

类似于古典分析，在具体的计算和应用中，往往必须把高维空间的情况转化为低维空间来考察，即研究重积分与累次积分关系，交换累次积分次序问题．本段将通过建立测度空间$(X, \mathscr{A}, \mu)$和$(Y, \mathscr{B}, \upsilon)$的乘积空间 $X \times Y$ 上的乘积测度 $\mu \times \upsilon$ 来导出重积分化为累次积分计算和交换积分次序的富比尼定理．

设$(X, \mathscr{A})$和$(Y, \mathscr{B})$是可测空间，**笛卡尔乘积** $X \times Y = \{(x,$

$y):x\in X,y\in Y\}$，例如 $R^2=R\times R$. 如果 $A\subset X$，$B\subset Y$，称 $A\times B$ 为 $X\times Y$ 内的**矩形**；若 $A\in\mathscr{A}$，$B\in\mathscr{B}$，则称 $A\times B$ 为**带有可测边的矩形**．我们用 $\mathscr{A}\times\mathscr{B}$ 表示由 $\{A\times B:A\in\mathscr{A},B\in\mathscr{B}\}$ 生成的 $X\times Y$ 上的 σ 代数，并称它为 σ 代数 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 的乘积，$(X\times Y,\mathscr{A}\times\mathscr{B})$ 是一个可测空间．

定义 4.6 (1)设 E 是 $X\times Y$ 的一个子集，任取 $x\in X$，令

$$E_x=\{y:(x,y)\in E\},$$

称 E_x 为 E 的 x **截口**．同样，对 $y\in Y$，称

$$E^y=\{x:(x,y)\in E\}$$

为 E 的 y **截口**．

(2) 设 $f(x,y)$ 定义在 $X\times Y$ 上，将 x 固定，看作 y 的函数，记为 $f_x(y)=f(x,y)$，称 $f_x(y)$ 为 f **的** x **截口**；将 y 固定，看作 x 的函数，记为 $f^y(x)=f(x,y)$，称 $f^y(x)$ 为 f **的** y **截口**．

定理 4.6 设 $(X,\mathscr{A})$ 和 $(Y,\mathscr{B})$ 是可测空间，则

(1) 乘积空间 $(X\times Y,\mathscr{A}\times\mathscr{B})$ 的每个可测集 E 的截口是可测的；

(2) 若 $f:X\times Y\to[-\infty,+\infty]$ 是 $\mathscr{A}\times\mathscr{B}$ 可测函数，则 $f_x(y)$ 是 $\mathscr{B}$ 可测函数，$f^y(x)$ 是 $\mathscr{A}$ 可测函数．

证 (1) 设 $x\in X$，令

$$\mathscr{F}=\{E\subset X\times Y:E_x\in\mathscr{B}\},$$

只要证明 $\mathscr{F}\supset\mathscr{A}\times\mathscr{B}$. 为此，我们证明 $\mathscr{F}$ 是包含 $\{A\times B:A\in\mathscr{A},B\in\mathscr{B}\}$ 的 σ 代数．注意到，当 $A\in\mathscr{A}$，$B\in\mathscr{B}$ 时

$$(A\times B)_x=\begin{cases}B, & x\in A,\\ \varnothing, & x\overline{\in} A,\end{cases}$$

则 $(A\times B)_x\in\mathscr{B}$，从而 $A\times B\in\mathscr{F}$，特别 $X\times Y\in\mathscr{F}$，再利用等式

$$(\mathscr{C}E)_x=\mathscr{C}E_x,\ (\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)_x=\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n)_x,$$

立即知 $\mathscr{F}$ 关于“求补”和“可列并”运算封闭，因此 $\mathscr{F}$ 是一个 σ 代数，且 $\mathscr{F}\supset\{A\times B:A\in\mathscr{A},B\in\mathscr{B}\}$，故 $\mathscr{A}\times\mathscr{B}\subset\mathscr{F}$，即 E_x 是可

测的，同理可证，E^y 也是可测的．

(2) 因为 f 是 $\mathscr{A}\times\mathscr{B}$ 可测函数，则对任一实数 α，

$$\{(x,y):\ f(x,y)>\alpha\}\in\mathscr{A}\times\mathscr{B}.$$

固定 $x\in X$，

$$\begin{aligned}\{y: f_x(y)>\alpha\}&=\{y: f(x,y)>\alpha\}\\&=\{(x,y):\ f(x,y)>\alpha\}_x\end{aligned}$$

上式右端是可测集的 x 截口，由(1)知 $f_x(y)$是 $\mathscr{B}$ 可测的，同理 $f^y(x)$是 $\mathscr{A}$ 可测的．

设$(X,\mathscr{A},\mu)$和$(Y,\mathscr{B},\upsilon)$均是测度空间，下面利用测度 μ,υ 来建立$(X\times Y,\mathscr{A}\times\mathscr{B})$上的测度 λ.

定理 4.7 设$(X,\mathscr{A},\mu)$和$(Y,\mathscr{B},\upsilon)$都是 σ 有限测度空间，如果 $E\in\mathscr{A}\times\mathscr{B}$，则函数 $f(x)=\upsilon(E_x)$是 μ 可测函数，函数 $g(y)=\mu(E^y)$是 υ 可测函数．

证 先设 υ 是有限测度，令

$$\mathscr{F}=\{E\in\mathscr{A}\times\mathscr{B}: f(x)=\upsilon(E_x)\text{ 是 }\mu\text{ 可测函数}\}.$$

只要证明 $\mathscr{F}$ 是包含$\{A\times B:\ A\in\mathscr{A},\ B\in\mathscr{B}\}$的 σ 代数，就可知 $\mathscr{F}=\mathscr{A}\times\mathscr{B}$，则 $f(x)=\upsilon(E_x)$是 μ 可测函数．

事实上由理 4.6，$E_x\in\mathscr{B}$，则 $\upsilon(E_x)$有定义，因为当 $E=A\times B$，其中 $A\in\mathscr{A}$，$B\in\mathscr{B}$ 时，

$$E_x=\begin{cases}B, & x\in A,\\ \varnothing, & x\,\overline{\in}\,A,\end{cases}$$

所以 $E=A\times B$ 时有，$\upsilon(E_x)=\upsilon(B)\chi_A(x)$，特征函数 $\chi_A(x)\,\mu$ 可测，故 $f(x)=\upsilon(E_x)$必 μ 可测，即 $A\times B\in\mathscr{F}$，特别地 $X\times Y\in\mathscr{F}$. 因为$(\mathscr{C}E)_x=\mathscr{C}(E_x)$，$\upsilon(\mathscr{C}E)_x)=\upsilon(Y)-\upsilon(E_x)$，所以 $E\in\mathscr{F}$ 时，必有 $\mathscr{C}E\in\mathscr{F}$，又若 $E_1,E_2\in\mathscr{F}$，$E_1\cap E_2=\varnothing$，则$(E_1\cup E_2)_x=(E_1)_x\cup(E_2)_x$，且$(E_1)_x\cap(E_2)_x=\varnothing$，故

$$\upsilon((E_1\cup E_2)_x)=\upsilon((E_1)_x)+\upsilon((E_2)_x).$$

$\upsilon((E_1\cup E_2)_x)$是两个 μ 可测函数之和，必 μ 可测，$E_1\cup E_2\in\mathscr{F}$，故 $\mathscr{F}$ 是一个代数．

注意到若$\{E_n\}$是$\mathscr{F}$ 中的渐张序列，则

$$\upsilon((\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)_x) = \lim_{n\to\infty}\upsilon((E_n)_x),$$

右边是μ可测函数序列的极限，必μ可测，故$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n\in\mathscr{F}$，根据定理 4.2，$\mathscr{F}$ 是一个σ代数，上面已证$\mathscr{F}\supset\mathscr{A}\times\mathscr{B}$，所以$\mathscr{F}=\mathscr{A}\times\mathscr{B}$，从而对任一$E\in\mathscr{A}\times\mathscr{B}$，$\upsilon(E_x)$是$\mu$可测的．

现设υ是σ有限测度，令$Y=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}D_n$，$D_n\in\mathscr{B}$，$D_n$互不相交，且$\upsilon(D_n)<\infty$，$n=1,2,3,\cdots$，$B\in\mathscr{B}$，令$\upsilon_n(B)=\upsilon(B\cap D_n)$，则$\upsilon_n$是$(Y,\mathscr{B})$上的一个有限测度，由第一步所证，对每一个$n$，$\upsilon_n(E_x)$是$\mu$可测的．

任取$E\in\mathscr{A}\times\mathscr{B}$，$E_x=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(E_x\cap D_n)$，$\upsilon(E_x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\upsilon_n(E_x)$，故$\upsilon(E_x)$是$\mu$可测的．同理可证$\mu(E^y)$是$\upsilon$可测函数．

定理 4.8　设$(X,\mathscr{A},\mu)$和$(Y,\mathscr{B},\upsilon)$都是σ有限测度空间，则存在唯一的σ代数$\mathscr{A}\times\mathscr{B}$上的$\sigma$有限测度$\lambda$，使

$$\lambda(A\times B)=\mu(A)\times\upsilon(B),\ (\forall\ A\in\mathscr{A},\ B\in\mathscr{B})\quad(4.5)$$

对一切$E\in\mathscr{A}\times\mathscr{B}$，有

$$\lambda(E)=\int_X\upsilon(E_x)\mathrm{d}\mu=\int_Y\mu(E^y)\mathrm{d}\upsilon,\quad(4.6)$$

测度λ称作μ和υ的**乘积测度**　并记$\lambda=\mu\times\upsilon$.

证　对任一$E\in\mathscr{A}\times\mathscr{B}$，由定理 4.7 知$\upsilon(E_x)$，$\mu(E^y)$是非负可测函数，故可定义$\mathscr{A}\times\mathscr{B}$上的非负函数$\lambda_1,\lambda_2$如下：

$$\lambda_1(E)=\int_Y\mu(E^y)\mathrm{d}\upsilon,$$

$$\lambda_2(E)=\int_X\upsilon(E_x)\mathrm{d}\mu.$$

易知$\lambda_1(\varnothing)=\lambda_2(\varnothing)=0$，若$\{E_n\}$是$\mathscr{A}\times\mathscr{B}$中的互不相交集合序列，$E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$，$y\in Y$，则$\{E_n^y\}$是$\mathscr{A}$中互不相交的集合序列，且$E^y$

$=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n^y$，因此，$\mu(E^y)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu(E_n^y)$，则据逐项积分定理，

$$\lambda_1(E)=\int_Y\mu(E^y)\mathrm{d}\upsilon=\sum_{n=1}^{\infty}\int_Y\mu(E_n^y)\mathrm{d}\upsilon$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_1(E_n).$$

于是 λ_1 是可数可加的，类似可证 λ_2 也是可数可加的，且当 $A\in\mathscr{A}$，$B\in\mathscr{B}$，$E=A\times B$ 时，$\upsilon(E_x)=\upsilon(B)\chi_A(x)$，$\mu(E^y)=\mu(A)\chi_B(y)$，则

$$\lambda_1(A\times B)=\mu(A)\times\upsilon(B)=\lambda_2(A\times B),$$

故 λ_1，λ_2 是 $\mathscr{A}\times\mathscr{B}$ 上的满足(4.5)的两个测度．

下面证明满足(4.5)的 $\mathscr{A}\times\mathscr{B}$ 上的测度必唯一，从而(4.6)也成立．设存在 $\mathscr{A}\times\mathscr{B}$ 上的两个测度 λ_1,λ_2，使 $A\in\mathscr{A},B\in\mathscr{B}$ 时，有 $\lambda_1(A\times B)=\lambda_2(A\times B)=\mu(A)\times\upsilon(B)$，令

$$\mathscr{F}=\{E\in\mathscr{A}\times\mathscr{B}:\lambda_1(E)=\lambda_2(E)\},$$

只要证明 $\mathscr{F}=\mathscr{A}\times\mathscr{B}$，为此先证明 $\mathscr{F}$ 是一个 σ 代数．不妨设 μ,υ 均为有限测度，于是 λ_1,λ_2 也是有限测度，显然 $X\times Y\in\mathscr{F}$，且 $\mathscr{F}\supset\{A\times B,A\in\mathscr{A},B\in\mathscr{B}\}$，又若 $E,F\in\mathscr{F}$，$E\subset F$，则

$$\lambda_1(F-E)=\lambda_1(F)-\lambda_1(E)=\lambda_2(F)-\lambda_2(E)=\lambda_2(F-E),$$

即 $F-E\in\mathscr{F}$，从而若 $E\in\mathscr{F}$，则一定有 $\mathscr{C}E\in\mathscr{F}$.

设 $\{E_n\}$ 是 $\mathscr{F}$ 中互不相交的集合序列，$E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$，则

$$\lambda_1(E)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_1(E_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_2(E_n)=\lambda_2(E),$$

故 $E\in\mathscr{F}$，$\mathscr{F}$ 是一个 σ 代数，$\mathscr{F}\supset\mathscr{A}\times\mathscr{B}$，从而 $\mathscr{F}=\mathscr{A}\times\mathscr{B}$，这就证明了 $\lambda_1=\lambda_2$，满足(4.5)，(4.6)的测度唯一，记作 λ.

如果 μ,υ 是 σ 有限测度，可仿照定理 4.7 那样证明．

最后证明测度 λ 的 σ 有限性，设 $X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$，$A_n\in\mathscr{A}$，$\mu(A_n)<+\infty$，$Y=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n$，$B_n\in\mathscr{B}$，$\upsilon(B_n)<+\infty$，$n=1,2,3,\cdots$，则

$$X \times Y = \bigcup_{n,m}(A_n \times B_m),\ A_n \times B_m \in \mathscr{A} \times \mathscr{B},$$

$$\lambda(A_n \times B_m) = \mu(A_n) \times \upsilon(B_m) < +\infty,\ (n,m = 1,2,3,\cdots),$$

因此 λ 是 σ 有限测度.

将定理 4.8 应用于 R^2,可以证明 $\mathscr{B}(R^2)=\mathscr{B}(R)\times\mathscr{B}(R)$,令 m 是 $\mathscr{B}(R)$上的(L)测度,λ 为(L)测度 m 与 m 的乘积测度,得到 $\mathscr{B}(R^2)$上的一个测度 λ,满足

$$\begin{aligned}\lambda((a,b] \times (c,d]) &= (d-c)(b-a) \\ &= m((a,b]) \times m((c,d]),\end{aligned}$$

由此,可以证明乘积测度 λ 等于 R^2 上的 Lebesgue 测度 m_2(详细证明可参阅文献[11]).

现在,我们考察重积分

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\mathrm{d}(\mu \times \upsilon),$$

与累次积分

$$\int_Y\left(\int_X f^y(x)\mathrm{d}\mu\right)\mathrm{d}\upsilon = \int_Y\left(\int_X f(x,y)\mathrm{d}\mu\right)\mathrm{d}\upsilon,$$

$$\int_X\left(\int_Y f_x(y)\mathrm{d}\upsilon\right)\mathrm{d}\mu = \int_X\left(\int_Y f(x,y)\mathrm{d}\upsilon\right)\mathrm{d}\mu$$

的关系.

定理 4.9 (富比尼定理) 设$(X,\mathscr{A},\mu)$和$(Y,\mathscr{B},\upsilon)$都是 σ 有限测度空间,$f:X\times Y\to[-\infty,+\infty]$是 $\mu\times\upsilon$ 可测函数,

(1) 如果 $f(x,y)$是 $\mu\times\upsilon$ 可积函数,则 $f_x(y)$, $(f^y(x))$对几乎所有的 $x(y)$关于 $\upsilon(\mu)$可积,且

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f(x,y)\mathrm{d}(\mu \times \upsilon) &= \int_X\left(\int_Y f(x,y)\mathrm{d}\upsilon\right)\mathrm{d}\mu \\ &= \int_Y\left(\int_X f(x,y)\mathrm{d}\mu\right)\mathrm{d}\upsilon. \qquad (4.7)\end{aligned}$$

(2) 如果$|f(x,y)|$的两个累次积分中有一个存在,则 $f(x,y)$ 必 $\mu\times\upsilon$ 可积,从而(4.7)式也成立.

证 (1) 由对称性,我们只要证明(4.7)中的第一个等式.

第一步．设 $f(x,y)=\chi_E(x,y)$，则 $f_x(y)=\chi_{E_x}(y)$，按照定理 4.8，有

$$\int_{X\times Y}\chi_E(x,y)\mathrm{d}(\mu\times\upsilon)) = (\mu\times\upsilon)(E) = \int_X \upsilon(E_x)\mathrm{d}\mu$$
$$= \int_X (\int_Y \chi_{E_x}(y)\mathrm{d}\upsilon)\mathrm{d}\mu$$
$$= \int_X (\int_Y f(x,y)\mathrm{d}\upsilon)\mathrm{d}\mu,$$

故(4.7)对特征函数 $\chi_E(x,y)$成立，从而(4.7)式对简单函数也成立．

第二步．设 $f(x,y)\geqslant 0$，$(\mu\times\upsilon)$可测，必存在非负上升的简单函数列 $f_n(x,y)\to f(x,y)$，由第一步所证

$$\int_{X\times Y} f_n(x,y)\mathrm{d}(\mu\times\upsilon) = \int_X (\int_Y f_n(x,y)\mathrm{d}\upsilon)\mathrm{d}\mu.$$

虽然 $\int_Y f_n(x,y)\mathrm{d}\upsilon$ 也是非负上升的 μ 可测函数序列，由 Live 定理，

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\mathrm{d}(\mu\times\upsilon) = \int_X (\int_Y f(x,y)\mathrm{d}\upsilon)\mathrm{d}\mu.$$

第三步．对一般的$(\mu\times\upsilon)$可积函数 $f(x,y)$，$f=f_+-f_-$，

$$\int_{X\times Y} f(x,y)d(\mu\times\upsilon) = \int_{X\times Y} f_+\,\mathrm{d}(\mu\times\upsilon) - \int_{X\times Y} f_-\,\mathrm{d}(\mu\times\upsilon),$$

其中 $\int_{X\times Y} f_+\,\mathrm{d}(\mu\times\upsilon) < +\infty$，$\int_{X\times Y} f_-\,\mathrm{d}(\mu\times\upsilon) < +\infty$，由第二步所证

$$\int_{X\times Y} f_+\,\mathrm{d}(\mu\times\upsilon) = \int_X (\int_Y f_+\,(x,y)\mathrm{d}\upsilon)\mathrm{d}\mu < +\infty,$$
$$\int_{X\times Y} f_-\,\mathrm{d}(\mu\times\upsilon) = \int_X (\int_Y f_-\,(x,y)\mathrm{d}\upsilon)\mathrm{d}\mu < +\infty,$$

故 $\int_Y f_+\,(x,y)\mathrm{d}\upsilon$ 和 $\int_Y f_-\,(x,y)\mathrm{d}\upsilon$ 对几乎所有 x 存在，从而 $\int_Y f(x,y)\mathrm{d}\upsilon$ 对几乎所有 x 存在，且

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\mathrm{d}(\mu\times\upsilon)=\int_X\left(\int_Y f(x,y)\mathrm{d}\upsilon\right)\mathrm{d}\mu.$$

(2) 由(1)的第二步证明知，当 $f(x,y)\geqslant 0$，$\mu\times\upsilon$ 可测函数时，一定有(4.7)成立，将这一结果应用于 $|f(x,y)|$，立即知 $f(x,y)$ $\mu\times\upsilon$ 可积，再应用(1)的结论，立即知(2)成立.

例 4 设 $E=(0,1)\times(0,1)$，

$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\quad,\quad (x,y)\in E,$$

$\mu=\upsilon$ 是 Lebesgue 测度，则

$$\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}\upsilon\right)\mathrm{d}\mu=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}\mu\right)\mathrm{d}\upsilon=\int_0^1\frac{-1}{1+y^2}\mathrm{d}y=-\frac{\pi}{4},$$

由定理 4.9 知 $f(x,y)$ 在 E 上关于 $(\mu\times\upsilon)$ 不可积.

例 5 设 $h>0$，$A\subset[a,b](L)$ 可测，试证明

$$\frac{1}{2h}\int_a^b m(A\cap(x-h,x+h))\mathrm{d}x\leqslant m(A).$$

证 注意到 $x-h<t<x+h$ 等价于 $t-h<x<t+h$，利用富比尼定理可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2h}\int_a^b m(A\cap(x-h,x+h))\mathrm{d}x&=\frac{1}{2h}\int_a^b\mathrm{d}x\int_a^b\chi_{A\cap(x-h,x+h)}(t)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2h}\int_a^b\mathrm{d}x\int_a^b\chi_A(t)\chi_{(x-h,x+h)}(t)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2h}\int_a^b\mathrm{d}x\int_a^b\chi_A(t)\chi_{(t-h,t+h)}(x)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2h}\int_a^b\mathrm{d}t\int_a^b\chi_A(t)\chi_{(t-h,t+h)}(x)\mathrm{d}x\\&\leqslant\frac{1}{2h}\int_a^b\chi_A(t)\mathrm{d}t\int_{-\infty}^{\infty}\chi_{(t-h,t+h)}(x)\mathrm{d}x\\&=m(A).\end{aligned}$$

第三篇 泛函分析

泛函分析是一个抽象的数学分支，它在 20 世纪初才开始发展，直到本世纪 30 年代正式成为一门独立学科．

泛函分析起源于经典分析，其发展动力来自于线性代数、微分方程、积分方程、变分法以及逼近论，特别是线性积分方程，它的理论极大地影响了现代泛函分析的发展．

泛函分析的研究对象是抽象空间(无限维空间)及其抽象空间中的映射，它概括了古典数学分析、代数几何、函数论等各学科的许多重要概念和方法，数学的各个不同领域中的许多重要结果可以在泛函分析中用统一的方法来处理，目前它已被广泛应用到偏微分方程、概率论、随机过程、计算数学最优化理论、自动控制等各数学分支和近代科学技术领域．

泛函分析可分为线性泛函分析和非线性泛函分析，本书主要介绍线性泛函分析中一些最基本的概念和结果．

第十一章　距离空间·赋范线性空间

§1　距离空间

极限是数学分析中最基本的概念之一，我们最先遇到的实数列（直线上的点列）的极限概念，这个极限概念立刻可以推广到复数列（复平面上的点列）和 n 维空间的点列．直线或平面上两点 A,B 之间的距离就是线段 AB 的长度，古典分析中，点列 $x_n\to x_0$ 表示 x_n 与 x_0 之间的距离趋于 0，同样，分析中函数序列的一致收敛性和复变函数列的内闭一致收敛等概念也可以统一在下面要介绍的距离空间中按距离收敛的概念之中．

1.1　距离空间的定义和实例

直线上两点 x_1,x_2 间的距离 $|x_1-x_2|$ 有如下三个性质：

(1) 非负性：$|x_1-x_2|\geqslant 0$，$|x_1-x_2|=0$ 的充要条件是 $x_1=x_2$，

(2) 对称性：$|x_1-x_2|=|x_2-x_1|$，

(3) 三点不等式：$|x_1-x_2|\leqslant|x_1-x_3|+|x_3-x_2|$．

仔细分析一下 R 中的一些基本概念和结论，如收敛，开集，闭集等概念及其性质，就可以发现，实质上它们仅与距离的上述三条基本性质有关，因此，我们就以这三条基本性质为基础，在一般的非空集合上引进距离．

定义 1.1　设 X 是一非空集合，如果对于 X 中任意两个元素 x,y，按照某种法则有一个实数 $\rho(x,y)$ 与之对应，而且满足下面三

个条件：

(1) 非负性：$\rho(x,y)\geqslant 0$，$\rho(x,y)=0$ 的充要条件是 $x=y$，

(2) 对称性：$\rho(x,y)=\rho(y,x)$，

(3) 三点不等式：$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y)$.

则称 $\rho(x,y)$ 为 X 上的一个**距离**，X 称作以 ρ 为距离的**距离空间**，记为 (X,ρ)，距离空间中的元素又叫做**点**．X 中任一非空集合 M 按照 X 中的距离 ρ 显然也是一个距离空间，称 M 为 X 的子空间．

例 1 离散的距离空间

设 X 是任意的非空集合，对 X 中的任意两点 x,y，令

$$\rho(x,y)=\begin{cases}1, & \text{当 } x\neq y \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } x=y \text{ 时}.\end{cases}$$

显然这样定义的 ρ 满足定义 1.1 的全部条件，我们称 (X,ρ) 为离散的距离空间．

例 2 空间 $C[a,b]$，对 $x,y\in C[a,b]$，令

$$\rho(x,y)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|,$$

易知 $C[a,b]$ 按上述的 ρ 成为距离空间．

如果 $x_n\in C[a,b]$，$x\in C[a,b]$，那末 $\rho(x_n,x)\to 0$ 就是指

$$\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x_n(t)-x(t)|\to 0(n\to\infty).$$

即 $\{x_n(t)\}$ 一致收敛于 $x(t)$.

例 3 n 维欧几里得空间 R^n.

R^n 是由所有 n 维矢量 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 组成的集合，此处 $\xi_k(k=1,2,3,\cdots,n)$ 都是实数．对 $x,y\in R^n$，$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$，若令

$$\rho(x,y)=(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k-\eta_k|^2)^{1/2}, \tag{1.1}$$

则 ρ 满足定义 1.1 的全部条件．

非负性和对称性显然成立，只需证明三点不等式．为此先证明柯西(Cauchy)不等式：

$$(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k)^2 \leqslant (\sum_{k=1}^{n} a_k^2) \cdot (\sum_{k=1}^{n} b_k^2), \tag{1.2}$$

其中 $a_k, b_k (k=1,2,\cdots,n)$ 均为实数．

任取实数 λ，则

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} (a_k + \lambda b_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\lambda \sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \lambda^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2,$$

上式右端是 λ 的二次三项式，它对一切实数 λ 都是非负的，故

$$(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k)^2 \leqslant (\sum_{k=1}^{n} a_k^2) \cdot (\sum_{k=1}^{n} b_k^2),$$

所以 Cauchy 不等式(1.2)成立．由不等式(1.2)可得到

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2 &= \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} b_k^2, \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2(\sum_{k=1}^{n} a_k^2)^{1/2} \cdot (\sum_{k=1}^{n} b_k^2)^{1/2} + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \\ &= [(\sum_{k=1}^{n} a_k^2)^{1/2} + (\sum_{k=1}^{n} b_k^2)^{1/2}]^2. \end{aligned} \tag{1.3}$$

在 R^n 中任取 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，$z=(z_1,z_2,\cdots,z_n)$，并在(1.3)式中令 $a_k=x_k-z_k$，$b_k=z_k-y_k$，立即得

$$\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y).$$

因此 R^n 按(1.1)式定义的距离 ρ 是一个距离空间，称(R^n,ρ)为**实 n 维欧几里得空间**(Euclidean)，ρ 为欧几里得距离．

若在 R^n 中令

$$\rho_1(x,y) = \max_{1\leqslant k\leqslant n} |\xi_k - \eta_k|, \tag{1.4}$$

则易知 ρ_1 也是一个距离，(R^n,ρ_1)也是一个距离空间，这个例子告诉我们，在一个集合中，定义距离的方式不是唯一的．

记 C^n 是由一切 n 元复数组$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$组成的空间，这里 ξ_k $(k=1,2,\cdots,n)$均为复数，则 C^n 按距离(1.1)也是一个距离空间，称(C^n,ρ)为**复 n 维欧几里得空间**．

有了距离概念，我们就可以象数学分析一样定义点列的收敛概念．

定义 1.2 设(X,ρ)是一个距离空间，$\{x_n\}\subset X, x_0\in X$，若 $n\to\infty$时，$\rho(x_n,x_0)\to 0$，则称点列$\{x_n\}$收敛于 x_0，记作$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$ 或 $x_n\to x_0$.

定理 1.1 在距离空间(X,ρ)中，收敛点列$\{x_n\}$的极限是唯一的，又若 $x_n\to x_0$，则$\{x_n\}$的任一子序列$\{x_{n_k}\}$也收敛于 x_0.

证 设$\{x_n\}$收敛于两个点 x_0 和 y_0，则对任给的 $\varepsilon>0$，存在自然数 N，使得当 $n>N$ 时．

$$\rho(x_n,x_0)<\varepsilon, \rho(x_n,y_0)<\varepsilon,$$

由三点不等式得 $n>N$ 时

$$0\leqslant\rho(x_0,y_0)\leqslant\rho(x_0,x_n)+\rho(x_n,y_0)<2\varepsilon,$$

因为 $\varepsilon>0$ 是任给的，所以必有 $\rho(x_0,y_0)=0$，从而 $x_0=y_0$，收敛点列$\{x_n\}$的极限唯一．

现设$\{x_{n_k}\}$是$\{x_n\}$的任一子序列，$x_n\to x_0$，则对任给的 $\varepsilon>0$，存在自然数 N，使得当 $n>N$ 时，$\rho(x_n,x_0)<\varepsilon$，对于充分大的 k，$n_k>N$. 则也有

$$\rho(x_{n_k},x_0)<\varepsilon, \text{故 } x_{n_k}\to x_0.$$

定义 1.3 设 M 是距离空间 X 中的点集，如果存在 $x_0\in X$，使得

$$\sup_{x\in M}\rho(x,x_0)<+\infty.$$

则称 M 是 X 中的有界集．

定理 1.2 设$\{x_n\}$是距离空间 X 中的收敛点列，则集合$\{x_n:n=1,2,\cdots\}$是有界的．

证 设 $x_n\to x_0$，由收敛的定义，存在自然数 N，使得当 $n\geqslant N$ 时，

$$\rho(x_n,x_0)\leqslant 1,$$

于是

$$\begin{aligned}\sup_n\rho(x_n,x_0)&\leqslant\max(\rho(x_0,x_1),\rho(x_0,x_2)\cdots\rho(x_0,x_{N-1}),1)\\&<+\infty.\end{aligned}$$

因此，$\{x_n: n=1,2,\cdots\}$是有界的．

下面我们来讨论一些具体的距离空间中点列收敛的意义．

前面例 3 中已指出，R^n 按距离

$$\rho(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2\right)^{1/2},$$

和

$$\rho_1(x,y)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i-y_i|,$$

成为两个不同的距离空间，但我们容易证明在(R^n,ρ)和(R^n,ρ_1)中点列$\{x^{(m)}\}=\{(x_1^{(m)},x_2^{(m)},\cdots,x_n^{(m)})\}$收敛于$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的充要条件是每个坐标收敛，即

$$\lim_{m\to\infty}x_i^{(m)}=x_i\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

对于连续函数空间 $C[a,b]$，$\rho(x,y)=\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|$，则$\rho(x_n,x_0)\to 0$ 的充要条件是 $x_n(t)\rightrightarrows x_0(t)$，$t\in[a,b]$.

在 $C[a,b]$中也可以定义其它距离，例如我们在数学分析中已定义过距离

$$\rho_2(x,y)=\left(\int_a^b|x(t)-y(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}.$$

$C[a,b]$中点列$\{x_n(t)\}$按 ρ_2 收敛于 $x_0(t)$，称作**平方平均收敛**．如果取函数列

$$x_n(t)=\frac{1}{(b-a)^n}(t-a)^n\qquad(t\in[a,b],n=1,2,3,\cdots).$$

通过直接计算可知

$$\int_a^b x_n^2(t)\mathrm{d}t\to 0.$$

即$\{x_n(t)\}$按照距离 ρ_2 收敛于 $C[a,b]$中元素 $x_0(t)\equiv 0$，但显然$\{x_n(t)\}$不一致收敛于 0. 因此在 $C[a,b]$中按照两个不同的距离 ρ 和 ρ_2 导出的收敛概念是不同的．

例 4　空间 s. 设 s 为实数列全体(或复数列全体)组成的空间，对于 $x,y\in s$，令

$$\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i-y_i|}{1+|x_i-y_i|},\qquad(1.5)$$

其中 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_k,\cdots)$，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_k,\cdots)$，则 s 是一个距离空间，且 s 的点列按距离 ρ 收敛等价于按坐标收敛．

首先验证 ρ 是 s 上的一个距离，ρ 满足非负性与对称性是显然的，我们证明 ρ 满足三点不等式．为此，考察函数

$$f(t)=\frac{t}{1+t}\quad(t\geqslant 0).$$

由于 $f(t)=1-\frac{1}{1+t}$，所以 $f(t)$ 是 $t\geqslant 0$ 上的上升函数，令 $z=(z_1,z_2,\cdots,z_k\cdots)\in s$，因为

$|x_i-y_i|\leqslant|x_i-z_i|+|z_i-y_i|\quad(i=1,2,3,\cdots)$，则

$$\begin{aligned}\rho(x,y)&=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i-y_i|}{1+|x_i-y_i|}\\&\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i-z_i|+|z_i-y_i|}{1+|x_i-z_i|+|z_i-y_i|}\\&\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i-z_i|}{1+|x_i-z_i|}+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|z_i-y_i|}{1+|z_i-y_i|}\\&=\rho(x,z)+\rho(z,y).\end{aligned}$$

现在我们来证明空间 s 中点列收敛等价于按坐标收敛．设 $x^{(n)}=(x_i^{(n)})\in s(n=1,2,3,\cdots)$，$x=(x_i)\in s$，且 $\rho(x^{(n)},x)\to 0$，则对每个 i 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x_i^{(n)}-x_i|}{1+|x_i^{(n)}-x_i|}=0.$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}|x_i^{(n)}-x_i|=0\qquad(i=1,2,3,\cdots).$$

反之，设 $x_i^{(n)}\to x_i(n\to\infty)$，$i=1,2,3,\cdots$，任给 $\varepsilon>0$，取定充分大的 m，使

$$\sum_{i=m}^{\infty}\frac{1}{2^i}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

又对 $i=1,2,\cdots,m-1$，存在自然数 N，使得当 $n>N$ 时

$$|x_i^{(n)}-x_i|<\frac{\varepsilon}{2}, i=1,2,\cdots,m-1,$$

则 $n>N$ 时

$$\sum_{i=1}^{m-1}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i^{(n)}-x_i|}{1+|x_i^{(n)}-x_i|}<\sum_{i=1}^{m-1}\frac{1}{2^i}\cdot\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

所以，当 $n>N$ 时，有

$$\rho(x^{(n)},x)=\sum_{i=1}^{m-1}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i^{(n)}-x_i|}{1+|x_i^{(n)}-x_i|}+\sum_{i=m}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i^{(n)}-x_i|}{1+|x_i^{(n)}-x_i|}$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

即 $\rho(x^{(n)},x)\to 0(n\to\infty)$.

例 5 空间 S. 设 E 为勒贝格可测集，$0<mE<+\infty$，在 E 上定义的一切几乎处处有限的可测函数组成的集合记成 S，S 中几乎处处相等的函数看成同一元素，对于 $x(t),y(t)\in S$，定义距离

$$\rho(x,y)=\int_E\frac{|x(t)-y(t)|}{1+|x(t)-y(t)|}\mathrm{d}t, \tag{1.6}$$

则 S 是一个距离空间，且 S 中的点列 $\{x_n(t)\}$ 按距离 ρ 收敛于 $x(t)$ 等价于 $x_n(t)\xrightarrow{\text{mes}}x(t)$.

由于 $\frac{|x(t)-y(t)|}{1+|x(t)-y(t)|}\overset{\text{a.e.}}{\leqslant}1$，$mE<\infty$，所以(1.6)式右边的勒贝格积分是存在的，类似于例 4，容易证明这样定义的 ρ 确实是 S 上的一个距离．我们只要证明在空间 S 中，$\rho(x_n,x)\to 0$ 的充要条件是 $\{x_n(t)\}$ 依测度收敛于 $x(t)$.

事实上，设 $\{x_n(t)\}\subset S$，$x(t)\in S$，对任给的 $\sigma>0$，令

$$E_n=E(|x_n(t)-x(t)|\geqslant\sigma),$$

则

$$\rho(x_n,x)=\int_E\frac{|x_n(t)-x(t)|}{1+|x_n(t)-x(t)|}\mathrm{d}t$$

$$\geqslant\int_{E_n}\frac{|x_n(t)-x(t)|}{1+|x_n(t)-x(t)|}\mathrm{d}t$$

$$\geqslant \int_{E_n} \frac{\sigma}{1+\sigma} \mathrm{d}t = \frac{\sigma}{1+\sigma} mE_n.$$

另一方面，

$$\rho(x_n, x) = \int_{E_n} \frac{|x_n(t) - x(t)|}{1 + |x_n(t) - x(t)|} \mathrm{d}t$$

$$+ \int_{E-E_n} \frac{|x_n(t) - x(t)|}{1 + |x_n(t) - x(t)|} \mathrm{d}t$$

$$\leqslant mE_n + \frac{\sigma}{1+\sigma} mE.$$

所以，对任给的 $\sigma > 0$，成立

$$\frac{\sigma}{1+\sigma} mE_n \leqslant \rho(x_n, x) \leqslant mE_n + \sigma \cdot mE,$$

由此，立即可知 $\rho(x_n, x) \to 0$ 等价于 $x_n(t) \xrightarrow{\text{mes}} x(t)$.

综上所述，虽然在任何集合上我们总可以定义距离，但是一般说来，我们应该根据集合的特点适当地引进距离．在分析数学及其应用中最常用的是各种函数空间或序列空间，为了描述和研究函数列的某种特定的收敛概念（如一致收敛，测度收敛，平方平均收敛等）而引进的相应距离，才有本质的意义．

1.2 距离空间的点集和映射

为了进一步研究距离空间中点集和映射的性质，我们可以类似于数直线 R 中一样地引进一些拓扑概念（见第七章）：开球（邻域），开集，闭集等．

以下设 (X, ρ) 为距离空间，我们称

$$S(x_0, r) = \{x \in X : \rho(x, x_0) < r\},$$

是以 x_0 为中心，r 为半径的**开球**，称 X 的含有 x_0 的开球 $S(x_0, r)$ 的子集为 x_0 的一个**邻域**；称

$$\widetilde{S}(x_0, r) = \{x \in X : \rho(x, x_0) \leqslant r\},$$

是以 x_0 为中心，r 为半径的**闭球**．

有了邻域概念，便可以引进开集，闭包，闭集等概念．

定义 1.4 设 $G\subset X$，$x_0\in G$，若存在 $\varepsilon>0$，使 $S(x_0,\varepsilon)\subset G$，则称 x_0 为 G 的内点；若 G 中每一点都是它的内点，则称 G 为**开集**；规定空集 $\varnothing$ 也是开集．

由定义立刻可知，开球本身和全空间 X 是开集，每个开集一定是某些开球(可能是无限个)的并．类似于第七章定理 4.1 我们有下面的结论．

定理 1.3 设 X 为距离空间，则

(1) 全空间 X 和空集 $\varnothing$ 是开集，

(2) 任意个开集的并是开集，

(3) 有限个开集的交是开集．

证 (1) 显然成立．

(2) 设 $\{G_\alpha:\alpha\in I\}$ 是 X 中任意一族开集，$G=\bigcup\limits_{\alpha\in I}G_\alpha$，任取 $x\in G$，则有某个 $\alpha_0\in I$，使 $x\in G_{\alpha_0}$，G_{α_0} 是开集，所以 x 是 G_{α_0} 的内点，则必有开球 $S(x,\varepsilon)\subset G_{\alpha_0}\subset G$，故 x 是 G 的内点，G 是开集．

(3) 设 $G_1,G_2,\cdots,G_n$ 是 X 的有限个开集，$G=\bigcap\limits_{k=1}^{n}G_k$，任取 $x\in G$，则对一切 $k=1,2,\cdots,n$，有 $x\in G_k$，即 x 是每个 G_k 的内点，故有开球 $S(x,\varepsilon_k)\subset G_k$，$k=1,2,\cdots,n$. 取 $\varepsilon=\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\varepsilon_k$，则 $\varepsilon>0$，$s(x,\varepsilon)\subset\bigcap\limits_{k=1}^{n}G_k=G$，从而 G 是开集．

如果记 τ 为 X 的开集全体组成的集类，则定理 1.3 又可写成

(1) $X\in\tau$，$\varnothing\in\tau$，

(2) τ 中任意个元的并是 τ 中之元，

(3) τ 中有限个元的交是 τ 中之元．

在拓扑空间中，X 的满足上述(1)，(2)，(3)三条性质的子集类 τ 称作 X 上的一个**拓扑**，τ 中的集称作 X 中的开集．

定义 1.5 设 X 为距离空间，$A\subset X$.

(1) $x_0\in X$，如果对任一 $\varepsilon>0$，开球 $S(x_0,\varepsilon)$ 内都含有 $A-\{x_0\}$

中的点，则称 x_0 为 A 的**聚点**或**极限点**；极限点全体所成的集称为 A 的**导集**，记为 A'；若 $x_0\in A$，但不是 A 的聚点，则称 x_0 为 A 的**孤立点**.

(2) 称 $\overline{A}=A\cup A'$ 为 A 的**闭包**；若 $A=\overline{A}$，则称 A 为**闭集**.

由定义 1.5 知，A 的聚点不一定属于 A，读者也容易证明下列条件等价：

(1) $x_0\in\overline{A}$，

(2) 任一开球 $S(x_0,\varepsilon)$ 有 A 中之点，

(3) 存在点列 $\{x_n\}\subset A$，使 $x_n\to x_0$.

类似于第七章定理 4.3，我们可以证明下面的

定理 1.4 设 X 为距离空间，$A\subset X$，则下列条件等价：

(1) A 是闭集，

(2) $A'\subset A$，

(3) A 中任何收敛点列 $\{x_n\}$ 必收敛于 A 中的点，

(4) $\mathscr{C}A$ 为开集.

证 (1)⇒(2)显然.

(2)⇒(3). 设 $A'\subset A$，$\{x_n\}\subset A$，$x_n\to x_0$，如果存在 n，使 $x_n=x_0$，则 $x_0\in A$，如果对任何 n，$x_n\neq x_0$，则 $x_0\in A'\subset A$，故总有 $x_0\in A$.

(3)⇒(4). 设 A 中任何收敛点列必收敛于 A 中的点，任取 $x_0\in\mathscr{C}A$，若对一切自然数 n，

$$S\left(x_0,\frac{1}{n}\right)\cap A\neq\varnothing.$$

可取 $x_n\in S\left(x_0,\frac{1}{n}\right)\cap A$，则 $\{x_n\}\subset A$，$x_n\to x_0$，因此，$x_0\in A$，矛盾. 故必存在自然数 n，使 $S\left(x_0,\frac{1}{n}\right)\cap A=\varnothing$，即 $S\left(x_0,\frac{1}{n}\right)\subset\mathscr{C}A$，这就证明了 $\mathscr{C}A$ 为开集.

(4)⇒(1). 设 $\mathscr{C}A$ 为开集，任取 $x_0\in A'$，如果 $x_0\in\mathscr{C}A$，因为 $\mathscr{C}A$ 为开集，则存在自然数 n，使 $S\left(x_0,\frac{1}{n}\right)\subset\mathscr{C}A$，从而

$S\left(x_0,\frac{1}{n}\right)\cap A=\varnothing$，这与 x_0 是 A 的聚点矛盾，故 $x_0\in A$，即 $A'\subset A$，所以 $\overline{A}=A\cup A'=A$，A 为闭集得证．

由定理 1.3 和定理 1.4 立刻得下面的

定理 1.5 设 X 为距离空间，则

(1) X 本身和空集 $\varnothing$ 都是闭集，

(2) 任意个闭集的交集是闭集，

(3) 有限个闭集的并集是闭集．

利用 A 为闭集等价于 $\mathscr{C}A$ 为开集，容易证明下面的结论．

定理 1.6 设 X 为距离空间，$A\subset X$，则 A' 和 $\overline{A}$ 均是闭集．

这个定理的证明与数直线 R 中的情况相仿．

例 6 设 X 为距离空间，$A,B\subset X$，则 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

证 $\overline{A}\cup\overline{B}\subset\overline{A\cup B}$ 显然成立，现设 $x_0\in\overline{A\cup B}$，则存在点列 $\{x_n\}\subset A\cup B$，使 $x_n\to x_0$，从而必有无穷点列 $\{x_{n_k}\}\subset A$（或 $\subset B$），故 $x_0\in\overline{A}$（或 $\overline{B}$），即 $x_0\in\overline{A}\cup\overline{B}$，$\overline{A\cup B}\subset\overline{A}\cup\overline{B}$.

例 7 设 X 是离散空间，$x_0\in X$，对任何 $\varepsilon>0$，当 $\varepsilon\leqslant 1$ 时，$S(x_0,\varepsilon)=\{x_0\}$，因此，$X$ 的任何子集中每一点都是内点，因而一切子集都是开集．因为每个单点集 $\{x\}$ 是离散空间的开集，$\mathscr{C}\{x\}=X-\{x\}=\bigcup\limits_{y\neq x}\{y\}$ 也是开集，故单点集也是闭集．

类似于数学分析的函数连续性，在距离空间中也可引入连续映射的概念．数学分析中实函数 $f(x)$ 是 $R\to R$ 的映射，记 $\rho(x,y)=|x-y|$，$x,y\in R$，则 $f(x)$ 在 x_0 连续是指：对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使 $\rho(x,x_0)=|x-x_0|<\delta$ 时，恒有

$$\rho(f(x),f(x_0))=|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

或者对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使 $x\in S(x_0,\delta)$ 时，恒有 $f(x)\in S(f(x_0),\varepsilon)$.

定义 1.6 设 (X,ρ)，$(Y,\tilde{\rho})$ 都是距离空间，T 是 $X\to Y$ 的映射，$x_0\in X$，若对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $\rho(x,x_0)<\delta$ 时，恒有

$$\rho(Tx,Tx_0) < \varepsilon.$$

则称映射 T 在 x_0 点**连续**；如果映射 T 在 X 中每一点连续，则称 T 是 X 上的**连续映射**.

一般说，δ 与 x_0,ε 有关，如果 δ 仅与 ε 有关，与 $x_0\in X$ 无关，则称 T 在 X 上**一致连续**.

例如，设 (X,ρ) 为距离空间，$x_0\in X$ 取定，则

$$f(x) = \rho(x,x_0),\ (x \in X),$$

是 X 到 R 中的连续映射（函数）；

$$f(x,y) = \rho(x,y),\ (x,y \in X),$$

是 $X\times X\to R$ 的连续函数.

定理 1.7 设 T 是距离空间 (X,ρ) 到距离空间 $(Y,\tilde{\rho})$ 的映射，则下列条件等价：

(1) T 是 $X\to Y$ 的连续映射，

(2) 对任一 $x\in X$，$\{x_n\}\subset X$，当 $x_n\to x$ 时，有 $Tx_n\to Tx$，

(3) 对 Y 中任一开集 G，G 的原象 $T^{-1}(G)=\{x\in X:Tx\in G\}$ 是 X 中的开集，

(4) 对 Y 中任一闭集 F，F 的原象 $T^{-1}(F)$ 是 X 中的闭集.

证 (1)$\Rightarrow$(2)显然.

(2)$\Rightarrow$(1)用反证法. 设 T 在 x_0 不连续，则存在 $\varepsilon_0>0$，使得对每个 $\dfrac{1}{n}(n=1,2,3,\cdots)$ 有 $x_n\in X$，满足 $\rho(x_n,x_0)<\dfrac{1}{n}$，但 $\tilde{\rho}(Tx_n,Tx_0)\geqslant\varepsilon_0$，这与条件(2)矛盾，故 T 必连续.

(1)$\Rightarrow$(3) 设 T 是 $X\to Y$ 的连续映射，任取开集 $G\subset Y$，不妨设 $T^{-1}(G)\neq\varnothing$. 取 $x_0\in T^{-1}(G)$，则 $y_0=Tx_0\in G$. 因为 G 是开集，y_0 为 G 的内点，必存在开球 $S(y_0,\varepsilon)\subset G$，由 T 的连续性，存在 $\delta>0$，使 $\rho(x,x_0)<\delta$ 时，有

$$\tilde{\rho}(Tx,Tx_0) < \varepsilon.$$

即 $x\in S(x_0,\delta)$ 时，有 $Tx\in S(y_0,\varepsilon)\subset G$，所以 $S(x_0,\delta)\subset T^{-1}(G)$，$T^{-1}(G)$ 是 X 中的开集.

(3)⇒(1) 设对任一开集 $G \subset Y$，$T^{-1}(G)$是 X 中的开集．任取 $x_0 \in X$ 和 $\varepsilon > 0$，令 $G = S(Tx_0, \varepsilon)$，由假定，$T^{-1}(G)$是 X 中的开集，因为 $Tx_0 \in G$，所以 $x_0 \in T^{-1}(G)$，则存在 $\delta > 0$，使 $S(x_0, \delta) \subset T^{-1}(G)$，也就是说 $x \in S(x_0, \delta)$时，有 $Tx \in G = S(Tx_0, \varepsilon)$，故 T 在 x_0 连续．

利用 $T^{-1}(\mathscr{C}G) = \mathscr{C}T^{-1}(G)$ 立即知(1)⇔(4).

例 8 设(X, ρ)为距离空间，$A \subset X$ 非空，映射 $F: X \to R$ 定义为

$$F(x) = \rho(x, A) = \inf_{y \in A} \rho(x, y), \quad (x \in X)$$

则 F 是连续映射．

证 设 $x_1, x_2 \in X$，今估计$|F(x_1) - F(x_2)|$. 因为对任一$y \in A$，

$$\rho(x_1, y) \leqslant \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, y),$$

则

$$\rho(x_1, A) \leqslant \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, A).$$

同样地，我们可得

$$\rho(x_2, A) \leqslant \rho(x_2, x_1) + \rho(x_1, A).$$

故

$$|\rho(x_1, A) - \rho(x_2, A)| \leqslant \rho(x_1, x_2),$$

即

$$|F(x_1) - F(x_2)| \leqslant \rho(x_1, x_2),$$

因此 F 在 X 上是连续的．

1.3 稠密性和可分性

定义 1.7 设 X 为距离空间，A, B 均为 X 的子集，如果 $\overline{B} \supset A$，则称 B 在 A 中**稠密**．

读者容易证明下列条件等价：

(1) B 在 A 中稠密，

(2) 对任一 $x\in A$,存在点列 $\{x_n\}\subset B$,使 $x_n\to x$,

(3) 对任一 $\varepsilon>0$,$\bigcup\limits_{x\in B}S(x,\varepsilon)\supset A$.

应当注意,在稠密的定义中,并不要求 $B\subset A$,甚至 B 与 A 可以没有公共点,例如在直线 R 中,有理点集 Q 在 $R-Q$ 中稠密.

定义 1.8 设 X 是距离空间,如果 X 中存在一个可列稠密子集,则称 X 为**可分空间**;$A\subset X$ 称作可分的,是指存在 X 中的可列集 B,使 B 在 A 中稠密.

例 9 n 维欧几里得空间 R^n 是可分的,这是因为坐标是有理数的点全体是 R^n 的一个可列稠子集;连续函数空间 $C[a,b]$ 是可分的,因为由数学分析中的维尔斯特拉斯第一逼近定理知多项式全体在 $C[a,b]$ 中稠密,故以有理数为系数的多项式全体是 $C[a,b]$ 中的可列稠子集.

定理 1.8 设 X 为距离空间,$A\subset X$ 可分,则必存在 A 中的可列稠子集 B.

证 设 $\{x_n\}\subset X$ 是 A 的一个可列稠密集,对任何自然数 n,k,若 $S\left(x_n,\dfrac{1}{k}\right)\cap A\neq\varnothing$,就取 $y_n^{(k)}\in S\left(x_n,\dfrac{1}{k}\right)\cap A$,否则就不取,则集合 $B=\{y_n^{(k)}\}\subset A$ 至多可列,我们证明 B 在 A 中稠密.事实上,任取 $x\in A$ 和 $\varepsilon>0$,取 k 充分大,使 $\dfrac{1}{k}\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$,因为 $\{x_n\}$ 在 A 中稠密,则存在自然数 n_0,使 $\rho(x_{n_0},x)<\dfrac{1}{k}$,于是 $S\left(x_{n_0},\dfrac{1}{k}\right)\cap A\neq\varnothing$,对这个 n_0 和 k,存在点 $y_{n_0}^{(k)}\in B$,满足 $\rho(y_{n_0}^{(k)},x_{n_0})<\dfrac{1}{k}$,但

$$\rho(y_{n_0}^{(k)},x)\leqslant\rho(y_{n_0}^{(k)},x_{n_0})+\rho(x_{n_0},x)<\frac{2}{k}\leqslant\varepsilon.$$

这就证明了,对任给的 $\varepsilon>0$,存在 B 中一点 $y_{n_0}^{(k)}$,使

$$\rho(y_{n_0}^{(k)},x)<\varepsilon,$$

故 B 在 A 中稠密.

在实际应用的函数空间和数列空间中很多是可分空间,但也

有不可分的距离空间.

例 10 设 B[0,1]表示[0,1]上有界可测函数全体,在 B[0,1]中定义距离如下:

$$\rho(x,y)=\sup_{t\in[0,1]}|x(t)-y(t)|.$$

则 B[0,1]是不可分的距离空间.

证 考虑 B[0,1]中函数

$$x_s(t)=\begin{cases}1,0\leqslant t\leqslant s,\\0,s<t\leqslant 1,\end{cases}(s\in[0,1])$$

所成的集 E,E 显然与[0,1]对等,且当 $s_1,s_2\in[0,1]$,$s_1\neq s_2$ 时,

$$\rho(x_{s_1},x_{s_2})=1.$$

如果 B[0,1]可分,则存在可列稠密子集 M_0. 以 M_0 中每个元素 x 为中心,$\frac{1}{3}$为半径作开球 $S\left(x,\frac{1}{3}\right)$,$\left\{S\left(x,\frac{1}{3}\right):x\in M_0\right\}$可列,因为

$$\bigcup_{x\in M_0}S\left(x,\frac{1}{3}\right)\supset B[0,1].$$

则 E 中至少有两个元素 $x_{s_1}(t)$,$x_{s_2}(t)$属于同一个球$S\left(x,\frac{1}{3}\right)$中,于是

$$1=\rho(x_{s_1},x_{s_2})\leqslant\rho(x_{s_1},x)+\rho(x,x_{s_2})<\frac{2}{3},$$

矛盾,故 B[0,1]不可分.

1.4 完备性

众所周知,实数域 R 中任一柯西点列(或称基本列)必有极限,这实际上就是将实数域 R 作为距离空间的完备性,但在一般距离空间中,就不一定具有这种性质.今后我们将看到,具有这种性质的距离空间比一般的距离空间好得多.

定义 1.9 设 X 为距离空间,$\{x_n\}\subset X$. 如果对任一 $\varepsilon>0$,存在自然数 N,使得当 $n,m>N$ 时

$$\rho(x_n,x_m) < \varepsilon,$$

则称$\{x_n\}$为 X 中的**基本列**,或称为**柯西点列**;如果 X 中任一基本列都收敛于 X 中一点,则称 X 为**完备的距离空间**.

由定义 1.9 立即可知下面两个结论成立:

(1) 任何距离空间中收敛点列必是基本列,

(2) 完备距离空间的任一闭子空间也是完备的.

例 11 设 X 是有理数全体,$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}\subset X$,$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$,故$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$是 X 中的基本列,但$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$在 X 中没有极限,即有理数全体组成的距离空间 X 不完备.

例 12 $C[a,b]$的完备性.

设$\{x_n(t)\}\subset C[a,b]$是一基本列,则对任给的 $\varepsilon>0$,存在自然数 N,使得当 $n,m>N$ 时,对一切 $t\in[a,b]$成立

$$|x_n(t)-x_m(t)|<\varepsilon.$$

由数学分析知$\{x_n(t)\}$在$[a,b]$上一致收敛于某一个连续函数 $x(t)$,即 $\rho(x_n,x)\to 0$,故 $C[a,b]$完备.

例 13 数列空间 s, $\rho(x,y)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i-y_i|}{1+|x_i-y_i|}$,其中 $x=(x_i)$,$y=(y_i)$为 s 中任意两个元素,在前面例 4 中我们已证明 s 中 $x^{(n)}\to x$ 等价于按坐标收敛.现设 $x^{(n)}=(x_i^{(n)})$是 s 中任一基本列,则 $x^{(n)}$的第 $i(i=1,2,3,\cdots)$个坐标构成 R 中的一个柯西点列,故

$$\lim_{n\to\infty}x_i^{(n)}=x_i \text{ 存在}(i=1,2,3,\cdots).$$

记 $x=(x_i)\in s$,则

$$\rho(x^{(n)},x)\to 0,\ (n\to\infty).$$

所以 s 是完备的距离空间.

例 14 设 l^∞为有界数列全体组成的空间,l^∞中定义距离

$$\rho(x,y)=\sup_k|\xi_k-\eta_k|,$$

其中 $x=(\xi_k), y=(\eta_k)\in l^\infty$.

易知 l^∞ 是一个距离空间．再记 $l^1=\{x: x=(\xi_k), \sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|<\infty\}$，显然 $l^1\subset l^\infty$，试证明：按 l^∞ 的距离，l^1 是不完备的．

证　取 $x^{(n)}=\left(1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n},0,0\cdots\right)\in l^1$，$x=\left(1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n},\frac{1}{n+1},\cdots\right)$．则 $x\in l^\infty$，$x\overline{\in} l^1$，易知 $\{x^{(n)}\}$ 是 l^1 中的基本列，且 $\rho(x^{(n)},x)\to 0,(n\to\infty)$．由 l^∞ 中极限元的唯一性，可知 $\{x^{(n)}\}$ 按 ρ 不可能收敛于 l^1 中某一元，故 l^1 按 l^∞ 的距离 ρ 是不完备的。

应当指出，距离空间的完备性在很多方面起着重要作用，例如在§4 中我们将会看到它在证明方程解的存在、唯一性等方面所起的作用，今后在第十二章中还将看到它在其它方面如逆算子定理、共鸣定理中的作用．因此研究任一距离空间能否通过"添加"一些"点"使之成为完备的距离空间这一问题是非常有意义的．

设 (X,ρ) 和 (X_1,ρ_1) 均为距离空间，若存在映射 $T:X\to X_1$ 上，使得对一切 $x,y\in X$，有

$$\rho_1(Tx,Ty)=\rho(x,y),$$

则称 T 是 X 到 X_1 上的**等距映射**，并称 X 与 X_1 **等距**．

对任一距离空间，有下面的完备化定理．

定理 1.9　对任一距离空间，必存在一个完备的距离空间 X_0，使得 X 等距于 X_0 的一个稠密子空间 X'_0，且除去"等距不计外"，X_0 还是唯一的．

由于本定理的证明较复杂，在这里我们略去，有兴趣的读者可参阅文献[6]，[7].

下面我们讨论完备距离空间的第二纲性．

定义 1.10　设 X 为距离空间，A 是 X 的子集，如果 A 不在 X 的任一非空开球中稠密，则称 A 为**疏朗集**；如果 A 能表成可列个疏朗集的并，则称 A 为**第一纲集**；凡不是第一纲集的集称作**第二**

纲集．

容易知道，A 是疏朗集的充要条件是对任一开球 S，必存在开球 $S_1 \subset S$，使得 $S_1 \cap A = \varnothing$. 事实上，因为 A 不在 S 中稠密等价于存在 $b \in S$ 以及 b 为中心的开球 $S_1(b,\varepsilon)$，使 $S_1(b,\varepsilon) \cap A = \varnothing$，可取 ε 充分小，使 $S_1(b,\varepsilon) \subset S$.

由定义显然可知，R 中可列集是第一纲集，因为 R 中每个单点集 $\{x\}$ 显然是疏朗集．

为了讨论完备距离空间的第二纲性，我们先证明一个引理，它是数学分析中区间套定理的推广，因此又称作闭球套定理．

引理 设 X 是完备的距离空间，$\widetilde{S}_n(a_n,r_n) = \{x \in X : \rho(x,a_n) \leqslant r_n\}$ 是 X 中的一列闭球，满足：

$$\widetilde{S}_1 \supset \widetilde{S}_2 \supset \cdots \supset \widetilde{S}_n \supset \cdots,$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$，则必有唯一的点 $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \widetilde{S}_n$.

证 先证明球心组成的点列 $\{a_n\}$ 是 X 中基本列，由条件，当 $m>n$ 时，$a_m \in \widetilde{S}_n$，故 $m>n$ 时，有

$$\rho(a_m,a_n) \leqslant r_n, \tag{1.7}$$

$r_n \to 0$，从而 $\{a_n\}$ 是 X 中基本列．由于 X 是完备的，必存在 $x \in X$，使 $x = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. 在(1.7)式中令 $m \to \infty$，根据距离空间中距离函数的连续性得

$$\rho(x,a_n) \leqslant r_n,\ n = 1,2,3,\cdots,$$

即 $x \in \widetilde{S}_n, n=1,2,3,\cdots$. 因此 $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \widetilde{S}_n$.

再证明 x 是诸 $\widetilde{S}_n$ 的唯一公共点．设又有 X 中的点 $y \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \widetilde{S}_n$ 则

$$\rho(y,a_n) \leqslant r_n,$$

令 $n \to \infty$，即得

$$\rho(y,x) = \lim_{n\to\infty} \rho(y,a_n) = 0,$$

所以 $y=x$，即 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \widetilde{S}_n$ 中只有一点．

利用这个引理我们来证明下面的 Baire 纲定理．

定理 1.10 （贝尔[Baire]纲定理） 完备的距离空间必是第二纲集．

证 用反证法．设 $X=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$，$X$ 完备，其中每一个 E_n 是疏朗集．任取一个闭球 $\widetilde{S}_1(a_1,1)$，因为 E_1 疏朗，必有 X 中的闭球 $\widetilde{S}_2(a_2,\varepsilon_2)$，其中 $\varepsilon_2<\frac{1}{2}$，使得

$$\widetilde{S}_2(a_2,\varepsilon_2)\subset\widetilde{S}_1,\text{且 }\widetilde{S}_2\cap E_1=\varnothing.$$

又由于 E_2 是疏朗的，必有 $\widetilde{S}_3(a_3,\varepsilon_3)$，其中 $\varepsilon_3<\frac{1}{3}$，使得

$$\widetilde{S}_3(a_3,\varepsilon_3)\subset\widetilde{S}_2,\text{且 }\widetilde{S}_3\cap E_2=\varnothing.$$

如此，我们可以选得一列闭球 $\widetilde{S}_n(a_n,\varepsilon_n)$，其中 $\varepsilon_n<\frac{1}{n}$，满足

$$\widetilde{S}_1\supset\widetilde{S}_2\supset\cdots\supset\widetilde{S}_n\supset\cdots,\widetilde{S}_{n+1}\cap E_n=\varnothing.$$

据引理，存在 $x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\widetilde{S}_n$，因为 $\widetilde{S}_{n+1}\cap E_n=\varnothing$，故 $x\overline{\in}\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n=X$，矛盾，所以 X 不是第一纲集，即 X 是第二纲集．

利用纲定理可以给出[0,1]不可数的另一个证明．事实上，[0,1]是完备距离空间 R 中的闭子集，因而本身可看作一完备距离空间，显然

$$[0,1]=\bigcup_{0\leqslant x\leqslant 1}\{x\},$$

因为单元素 $\{x\}$ 是[0,1]中的疏朗集，所以[0,1]是不可数的．

§2 赋范线性空间

§1 中介绍了点列按距离收敛的概念，它统一了一致收敛、依测度收敛、按坐标收敛等极限概念．但是，仅有距离空间的概念，对分析数学的各个分支和近代数学物理中出现的大量线性、非线性问题不是够的．因为我们通常所考虑的函数空间和序列空间，例如 $C[a,b]$，它不仅是距离空间，而且关于通常的函数相加和数

与函数相乘这两种运算是封闭的，又如 R^n，在线性代数中已经定义了 n 维向量的相加以及数与 n 维向量的相乘，R^n 关于这两种运算是封闭的，它们都具有代数结构．当我们研究某些线性或非线性问题时，除了需要收敛概念外，往往还需要用到"元素的和"以及"数与元素的相乘"这类运算．若一个距离空间还有象 $C[a,b]$、R^n 那样的代数结构，应用起来就更方便．本节先介绍线性空间概念，然后介绍赋范线性空间的一些性质．

2.1 线性空间

在高等代数课程中已经给出了线性空间的定义，现将这个定义复述如下：

设 X 为一非空集合，K 是实（或复）数域，如果在 X 中规定了线性运算，即元素的加法以及 K 中数与 X 中元素的数乘运算，满足下述条件：

1．X 是一个加法群，即对 X 中任意两个元素 x,y，都存在 $u \in X$，使 $u=x+y$，称 u 为 x 与 y 的和，记作 $x+y$，且元素的加法满足

(1) $x+y=y+x$，

(2) $(x+y)+z=x+(y+z)$，

(3) X 中存在唯一的元素 0，使得对任何 $x\in X$，$0+x=x$，称 0 为 X 中的**零元素**，

(4) 对任何 $x\in X$，存在唯一的元素 $x'\in X$，使 $x+x'=0$，称 x' 为 x 的**加法逆元素**，记 $x'=-x$.

2．对任何 $x\in X$ 以及任何数 $\alpha\in K$，存在元素 $\alpha x\in X$，满足

(5) $1\cdot x=x$，

(6) $\alpha(\beta x)=\alpha(\beta)x$，

(7) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$，$\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$.

则称 X 为**实（或复）线性空间**或**向量空间**，其中的元素也称作**向量**．

例如 $C[a,b]$，R^n，s，S 均是线性空间．

对于线性空间，以下几个概念是经常用到的：

1° **线性相关与线性无关**

设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是实(复)线性空间 X 中一组元素，如果存在不全为零的 n 个实(复)数 $C_1,C_2,\cdots,C_n$，使

$$C_1x_1+C_2x_2+\cdots+C_nx_n=0,$$

则称 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是**线性相关的**，否则就称为**线性无关的**．

2° **子空间**

设 X 为线性空间，$X_0\subset X$，如果 X_0 对 X 中的线性运算是封闭的，则称 X_0 为 X 的一个**线性子空间**或简称为**子空间**．

显然 X_0 本身是一个线性空间，X 与 $\{0\}$ 也是 X 的子空间，将 X 中不同于 X 的子空间称作 X 的**真子空间**．

3° **子集 L 张成的子空间**

设 L 是线性空间 X 的一个子集，则集合

$$M=\{y:y=\sum_{k=1}^{n}C_kx_k,x_k\in L,C_k\in K,k=1,2,\cdots,n,n\in N\},$$

称作**子集 L 张成的子空间**．

容易验证 M 是 X 的一个子空间，且是包含 L 的最小子空间．

4° **线性空间的同构**

设 X,X_1 均是线性空间，如果存在 $X\to X_1$ 上的一对一线性映射 T，即 $T(x+y)=Tx+Ty$，$T(\alpha x)=\alpha Tx(x,y\in X,\alpha\in K)$，则称 X 和 X_1(代数)**同构**．

5° **直接和**

设 X 为线性空间，$L_1,L_2,\cdots,L_n$ 为 X 的子空间，如果对任一元素 $x\in X$，可唯一地表成：

$$x=x_1+x_2+\cdots+x_n,$$

其中 $x_k\in L_k$，$k=1,2,\cdots,n$，则称 X 为 $L_1,L_2,\cdots,L_n$ 的**直接和**，记为

$$X=L_1\dot{+}L_2\dot{+}\cdots\dot{+}L_n \text{ 或 } X=\sum_{k=1}^{n}\dot{+}L_k.$$

容易证明 $X=\sum_{k=1}^{n}\dot{+}L_k$ 的充要条件是：对任一 $x\in X$，$X=\sum_{k=1}^{n}x_k$，其中 $x_k\in L_k$，$k=1,2,\cdots,n$，且 $0\neq y_k\in L_k(k=1,2,\cdots n)$ 时，y_1，$y_2,\cdots,y_n$ 必线性无关．

事实上，设 $X=\sum_{k=1}^{n}\dot{+}L_k$，由直接和的定义，只需证明 $0\neq y_k\in L_k(k=1,2,\cdots,n)$ 时，$y_1,y_2,\cdots,y_n$ 线性无关．设

$$C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ny_n=0,$$

由 0 元素表示法的唯一性，得 $C_1=C_2=\cdots=C_n=0$，故 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 线性无关．反之，设条件成立，只需证明表示法唯一，设

$$x=x_1+x_2+\cdots+x_n=x'_1+x'_2+\cdots+x'_n,$$

其中 $x_k\in L_k,x'_k\in L_k,k=1,2,\cdots,n$，则

$$(x_1-x'_1)+(x_2-x'_2)+\cdots+(x_n-x'_n)=0.$$

如果 $x_k-x'_k(k=1,2,\cdots,n)$ 中有 l 个（例如前 l 个）$x_1-x'_1,x_2-x'_2\cdots,x_l-x'_l$ 不为 0，则得

$$(x_1-x'_1)+(x_2-x'_2)+\cdots+(x_l-x'_l)=0,$$

即 $x_1-x'_1,x_2-x'_2,\cdots,x_l-x'_l$ 线性相关，与假设条件成立矛盾，故表示法唯一．

2.2 赋范线性空间

在§1 距离空间中，任一集合引进距离就可以讨论收敛性．一般的距离空间不一定有线性空间这样的代数结构，在线性空间中我们将引入一个特殊的距离，它与线性空间的代数结构有关系，从而使得用它来处理问题时发挥出更大作用．为此我们先引入范数概念，它是向量长度的推广，范数用到了空间的代数运算，然后，利用范数得到一个特殊的距离．

定义 2.1 设 X 是实（或复）的线性空间，如果对每个元素 $x\in X$，有一个确定的实数 $\|x\|$ 与之对应，并且满足

(1) $\|x\|\geqslant 0$，且 $\|x\|=0$ 当且仅当 $x=0$，

(2) $\|\alpha x\|=|\alpha|\cdot\|x\|$，其中 α 是任意的实(或复)数，

(3) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$，$x,y\in X$.

则称 $\|x\|$ 为元素 x 的**范数**，X 为**赋范线性空间**.

对赋范线性空间 X，如果令

$$\rho(x,y)=\|x-y\|,$$

容易验证 ρ 是 X 上的一个距离，称 ρ 是由范数导出的距离. 如果 X 按照 $\rho(x,y)=\|x-y\|$ 是完备的，则称 X 为 Banach 空间.

定义 2.2 设 X 为赋范线性空间，$\{x_n\}\subset X$，$x\in X$，如果

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0,$$

则称 $\{x_n\}$ **强收敛**于 x，记为 $x_n\xrightarrow{s}x$ 或简记为 $x_n\to x$，

利用范数的性质可以证明下面几个简单性质：

1° 设 $x_n\to x$，则 $\{\|x_n\|\}$ 是有界数列，

2° 范数 $\|x\|$ 是 $x\in X$ 的连续函数，

事实上，因为

$$|\|x\|-\|y\||\leqslant\|x-y\|,\ (x,y\in X),$$

则如果 $x_n\to x$，就有

$$|\|x_n\|-\|x\||\leqslant\|x_n-x\|,$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n\|=\|x\|.$$

3° 如果 $x_n\to x$，$y_n\to y$，则 $x_n+y_n\to x+y$；又若数列 $\alpha_n\to\alpha$，则 $\alpha_n x_n\to\alpha x$.

这是因为

$$\|x_n+y_n-(x+y)\|\leqslant\|x_n-x\|+\|y_n-y\|,$$

以及

$$\begin{aligned}\|\alpha_n x_n-\alpha x\|&\leqslant\|\alpha_n x_n-\alpha_n x\|+\|\alpha_n x-\alpha x\|\\&\leqslant|\alpha_n|\cdot\|x_n-x\|+|\alpha_n-\alpha|\cdot\|x\|.\end{aligned}$$

性质 3°表明线性运算关于 X 中的收敛概念是连续的. 一般地，一个线性空间引进了拓扑，如果按照这个拓扑线性运算是连续

的，即性质 3°成立，就称它为**线性拓扑空间**. 因此，赋范线性空间是一个线性拓扑空间.

例 1 n 维欧几里得空间 R^n，对 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n$，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in R^n$，$\alpha\in K$，

$$x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)$$
$$\alpha x=(\alpha x_1,\alpha x_2,\cdots,\alpha x_n).$$

若令

$$\|x\|=(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2)^{1/2},$$

则容易验证 $\|\cdot\|$ 是 R^n 上的一个范数，由 $\|\cdot\|$ 导出的距离就是 §1 中讨论过的欧几里得距离，因此，R^n 中的强收敛等价于按坐标收敛，R^n 是一个 Banach 空间.

例 2 连续函数空间 $C[a,b]$，对 $x(t)\in C[a,b]$，规定

$$\|x\|=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|,$$

则 $\|\cdot\|$ 是 $C[a,b]$ 上的一个范数，易知 $C[a,b]$ 中强收敛等价于函数序列的一致收敛，$C[a,b]$ 是一个 Banach 空间.

例 3 空间 $C^{(k)}[a,b]$，$C^{(k)}[a,b]$ 表示 $[a,b]$ 上具有 k 阶连续导数的一切函数组成的集合，其中的线性运算与 $C[a,b]$ 中相同，在 $C^{(k)}[a,b]$ 中定义范数如下：

$$\|x\|=\sum_{j=0}^{k}\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x^{(j)}(t)|\qquad (x^{(0)}(t)=x(t)\in C^{(k)}[a,b]),$$

则 $C^{(k)}[a,b]$ 是一个 Banach 空间.

首先，易知 $\|\cdot\|$ 是 $C^{(k)}[a,b]$ 上的范数，且 $x_n\to x$ 等价于

$$x_n^{(j)}(t)\rightrightarrows x^{(j)}(t)\ (j=0,1,\cdots,k).$$

现在证明 $C^{(k)}[a,b]$ 是完备的. 设 $\{x_n\}\subset C^{(k)}[a,b]$ 是任一基本列，则对任给的 $\varepsilon>0$，存在自然数 N，使 $n,m\geqslant N$ 时，有

$$\sum_{j=0}^{k}\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x_n^{(j)}(t)-x_m^{(j)}(t)|<\varepsilon,$$

于是当 $n,m\geqslant N$ 时，对每个 $j(0\leqslant j\leqslant k)$ 和一切 $t\in[a,b]$，有

$$|x_n^{(j)}(t) - x_m^{(j)}(t)| < \varepsilon,$$

取 $j=0$ 可得 $x_n(t) \Rightarrow x(t)$，$x(t)$连续，再由数学分析的一致收敛函数序列性质知 $x_n^{(j)}(t) \Rightarrow x^{(j)}(t)$，$(0 \leqslant j \leqslant k)$，所以 $x(t) \in C^{(k)}[a,b]$，且 $x_n \to x$，故 $C^{(k)}[a,b]$是一个 Banach 空间．

应当注意，不完备的赋范线空间是存在的．

例 4 $C[a,b]$按照范数

$$\| x \|_2 = \left(\int_a^b |x(t)|^2 \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}},$$

是一个不完备的赋范线性空间．

证 在数学分析中已指出 $\|\cdot\|_2$ 满足范数三个条件，故 $C[a,b]$按范数 $\|\cdot\|_2$ 是一个赋范线性空间．取 $c=\dfrac{a+b}{2}$，令

$$x_n(t) = \mathrm{arctg} n(t-c),\ t \in [a,b], n = 1,2,3,\cdots,$$

则 $x_n(t)$处处收敛于 $x_0(t)$，其中

$$x_0(t) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & c < t \leqslant b, \\ 0, & t = c, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & a \leqslant t < c. \end{cases}$$

据勒贝格控制收敛定理

$$\int_a^b |x_n(t) - x_0(t)|^2 \mathrm{d}t \to 0,\ (n \to \infty),$$

故$\{x_n(t)\}$按 $\|\cdot\|_2$ 强收敛于 $x_0(t)$，$x_0(t) \overline{\in} C[a,b]$，若 $C[a,b]$按 $\|\cdot\|_2$ 是完备的，则 $x_n(t)$按 $\|\cdot\|_2$ 收敛于某一个连续函数 $x(t)$，我们视 $C[a,b]$为 $L^2[a,b]$的一个子空间，据 $L^2[a,b]$中收敛点列极限元的唯一性，知

$$x(t) \overset{\text{a.e.}}{=} x_0(t),$$

但容易看到 $x_0(t)$不可能对等于一个连续函数，因此 $C[a,b]$按 $\|\cdot\|_2$是不完备的．

对于不完备的赋范线性空间也有完备化定理，为此，先引进等

距同构概念.

定义 2.3 设 X,X_1 都是赋范线性空间，$\|\cdot\|$，$\|\cdot\|_1$分别表示 X 和 X_1 的范数，如果 X,X_1 是代数同构的，同构映射为 T，且同构映射 T 是等距映射，即对任何 $x,y\in X$，有

$$\|Tx-Ty\|_1=\|x-y\|,$$

则称 X 和 X_1 **等距同构**.

利用距离空间的完备化定理可得下面的完备化定理，我们略去这个定理的证明，仅叙述如下：

定理 2.1 对任一赋范线性空间 X，必存在一个 Banach 空间 X_0，使 X 等距同构于 X_0 的一个稠密子空间，且除去等距同构不计外，X_0 是唯一确定的.

2.3 空间 $\mathrm{L}^p[a,b](1\leqslant p<\infty)$和 $\mathrm{L}^\infty[a,b]$

在现代分析中最常用的函数空间是 $\mathrm{L}^p[a,b]$，本段将证明 $\mathrm{L}^p[a,b]$，$(p\geqslant 1)$和 $\mathrm{L}^\infty[a,b]$是完备的赋范线性空间.

$$\mathrm{L}^p[a,b]=\{f(t)\text{ 在}[a,b]\text{ 上可测}:\int_a^b|f(t)|^p\mathrm{d}t<\infty\}.$$

$\mathrm{L}^p[a,b]$中两个几乎处处相等的函数视为同一元素.$p=1$ 时，$\mathrm{L}^1[a,b]$即为$[a,b]$上勒贝格可积函数全体，简记为 $\mathrm{L}[a,b]$.

$\mathrm{L}^p[a,b]$接通常的函数加法以及数乘运算是一个线性空间，事实上，设 $f,g\in \mathrm{L}^p[a,b]$，因为 $f+g$ 在$[a,b]$上仍然可测，而且由

$$\begin{aligned}|f(t)+g(t)|^p&\leqslant(2\max\{|f(t)|,|g(t)|\})^p\\&\leqslant 2^p(|f(t)|^p+|g(t)|^p),\end{aligned}$$

可知$|f+g|^p$ 也是$[a,b]$上的勒贝格可积函数，即 $f+g\in \mathrm{L}^p[a,b]$，对任一$\alpha\in K$，$\alpha f\in \mathrm{L}^p[a,b]$显然.

对每个 $f\in \mathrm{L}^p[a,b]$，规定

$$\|f\|_p=\left(\int_a^b|f(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{1/p}.\tag{2.1}$$

下面，我们将证明由(2.1)给出的$\|\cdot\|_p$是 $\mathrm{L}^p[a,b]$上的范数.

首先,易见对任一数 $\alpha\in K$,$\|\alpha f\|_p=|\alpha|\cdot\|f\|_p$,$\|f\|_p\geqslant 0$ 对一切 $f\in L^p[a,b]$ 成立,而且 $\|f\|_p=0$ 等价于 $f(t)\overset{\text{a.e.}}{=\!=}0$,即 f 是 $L^p[a,b]$ 的零元素.为了证明 $\|f+g\|_p\leqslant\|f\|_p+\|g\|_p$,我们先证明几个常用的不等式.

引理 1 设 $p>1,\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$,则对一切 $\xi\geqslant 0,\eta\geqslant 0$ 有

$$\xi\eta\leqslant\frac{\xi^p}{p}+\frac{\eta^q}{q}. \tag{2.2}$$

证 考察函数 $s=\varphi(t)=t^\alpha(\alpha>0)$,因为 $t>0$ 时,$\varphi'(t)=\alpha t^{\alpha-1}>0$,所以 $\varphi(t)$ 当 $t>0$ 时严格单调上升,其反函数 $t=s^{1/\alpha}$ 当 $s>0$ 时也是严格单调上升的.任取 $\xi,\eta>0$,如图 11.1 所示平面区域 S_1 的面积

$$\mu(S_1)=\int_0^\eta s^{1/\alpha}\mathrm{d}s=\frac{\eta^{1+\frac{1}{\alpha}}}{1+\dfrac{1}{\alpha}},$$

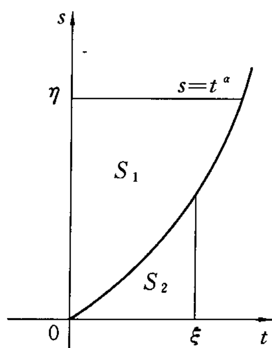


图 11.1

平面区域 S_2 的面积

$$\mu(S_2)=\int_0^\xi t^\alpha\mathrm{d}t=\frac{\xi^{1+\alpha}}{1+\alpha}.$$

另一方面,显然

$$\mu(S_1)+\mu(S_2)\geqslant\xi\eta,$$

而且等号当且仅当 $\eta=\xi^\alpha$ 时成立,所以

$$\xi\eta\leqslant\frac{\xi^{1+\alpha}}{1+\alpha}+\frac{\eta^{1+1/\alpha}}{1+\dfrac{1}{\alpha}}\quad(\xi,\eta>0).$$

现在令 $p=1+\alpha$,即 $\alpha=p-1$,则 $q=1+\dfrac{1}{\alpha}$,于是 $\xi,\eta\geqslant 0$ 时,有

$$\xi\eta\leqslant\frac{\xi^p}{p}+\frac{\eta^q}{q}.$$

引理 2 **(霍尔得[Hölder]不等式)** 设 $p>1,\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$,$f\in L^p[a,b]$,$g\in L^q[a,b]$,则 $f\cdot g\in L[a,b]$,且

$$\int_a^b |f(t)g(t)|\mathrm{d}t \leqslant \left(\int_a^b |f(t)^p|\mathrm{d}t\right)^{1/p} \cdot \left(\int_a^b |g(t)^q|\mathrm{d}t\right)^{1/q}. \tag{2.3}$$

证 不妨设 $f(t),g(t)$ 在 $[a,b]$ 上均非 a.e. 等于零．我们取

$$\xi(t)=\frac{|f(t)|}{\left(\int_a^b |f(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{1/p}},\eta(t)=\frac{|g(t)|}{\left(\int_a^b |g(t)|^q\mathrm{d}t\right)^{1/q}},t\in[a,b],$$

利用不等式(2.2)，得

$$\frac{|f(t)g(t)|}{\left(\int_a^b |f(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{1/p}\cdot\left(\int_a^b |g(t)|^q\mathrm{d}t\right)^{1/q}} \leqslant \frac{|f(t)|^p}{p\left(\int_a^b |f(t)|^p\mathrm{d}t\right)}+\frac{|g(t)|^q}{q\left(\int_a^b |g(t)|^q\mathrm{d}t\right)}. \tag{2.4}$$

对(2.4)两边积分，得

$$\frac{\int_a^b |f(t)g(t)|\mathrm{d}t}{\left(\int_a^b |f(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{1/p}\cdot\left(\int_a^b |g(t)|^q\mathrm{d}t\right)^{1/q}} \leqslant \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

故 $f\cdot g\in \mathrm{L}[a,b]$，且

$$\int_a^b |f(t)g(t)|\mathrm{d}t) \leqslant \|f\|_p\cdot\|g\|_q.$$

特别地，当 $p=q=2$ 时，不等式(2.3)化为**施瓦兹**(Schwartz)**不等式**：

$$\int_a^b |f(t)g(t)|\mathrm{d}t \leqslant \|f\|_2\cdot\|g\|_2 \qquad (f,g\in \mathrm{L}^2[a,b]).$$

引理 3 **(明可夫斯基(Minkowski)不等式)** 设 $p\geqslant 1,f,g\in \mathrm{L}^p[a,b]$，则 $f+g\in \mathrm{L}^p[a,b]$，且

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p+\|g\|_p. \tag{2.5}$$

证 $p=1$ 时，不等式(2.5)显然成立，不妨设 $p>1,f+g\neq 0$. 因为 $f+g\in \mathrm{L}^p[a,b]$，所以 $|f+g|^{\frac{p}{q}}\in \mathrm{L}^q[a,b]$，注意到 $\frac{p}{q}=p-1$，则

$$\int_a^b |f(t)+g(t)|^p \mathrm{d}t \leqslant \int_a^b |f(t)| \cdot |f(t)+g(t)|^{p/q} \mathrm{d}t + \int_a^b |g(t)| \cdot |f(t)+g(t)|^{p/q} \mathrm{d}t. \tag{2.6}$$

对(2.6)式右边应用 Hölder 不等式,得

$$\int_a^b |f(t)+g(t)|^p \mathrm{d}t \leqslant \left(\int_a^b |f(t)+g(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{1/q} [\|f\|_p + \|g\|_p].$$

故

$$\left(\int_a^b |f(t)+g(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{1-\frac{1}{q}} \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p,$$

即

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

综合以上的讨论,我们知道 $L^p[a,b]$ 按 $\|\cdot\|_p$ 是一个赋范线性空间.

定理 2.2 $L^p[a,b]$($1 \leqslant p < +\infty$)是一个 Banach 空间.

证 设 $\{f_n\}$ 是 $L^p[a,b]$ 中的任一基本列,则存在自然数 n_k,使得当 $n, m \geqslant n_k$ 时,

$$\|f_n - f_m\|_p < \frac{1}{2^k}.$$

不妨设 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$,于是

$$\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|_p < \frac{1}{2^k}, \tag{2.7}$$

$p > 1$ 时,利用 Hölder 不等式

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b |f_{n_k}(t) - f_{n_{k+1}}(t)| \mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|f_{n_k}(t) - f_{n_{k+1}}(t)\|_p (b-a)^{1/q}$$

$$< \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\right) \cdot (b-a)^{1/g} < \infty, \tag{2.8}$$

$p=1$ 时，由(2.7)直接可得

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b |f_{n_k}(t) - f_{n_{k+1}}(t)| \mathrm{d}t < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \infty, \tag{2.9}$$

利用第十章§2中的逐项积分定理(定理2.2)，

$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_k}(t) - f_{n_{k+1}}(t)|\right) \mathrm{d}t < \infty,$$

故 $\sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_k}(t)-f_{n_{k+1}}(t)|$ 在$[a,b]$上 a.e. 有限，从而级数

$$f_{n_1}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} [f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)],$$

在$[a,b]$上 a.e. 收敛，即存在可测函数 $f(x)$，使

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(t) \overset{\text{a.e.}}{=\!=} f(t).$$

下面证明 $f(x) \in L^p[a,b]$. 且 $\| f_n - f \|_p \to 0$. 因为$\{f_n\}$是$L^p[a,b]$中的基本列，对任给的 $\varepsilon>0$，存在自然数 N，使 $n,n_k>N$ 时

$$\| f_n - f_{n_k} \|_p < \varepsilon,$$

即 $n,n_k>N$ 时

$$\int_a^b |f_n(t) - f_{n_k}(t)|^p \mathrm{d}t < \varepsilon^p.$$

上式中固定 $n>N$，让 $k\to\infty$，由法杜定理，得

$$\int_a^b |f_n(t) - f(t)|^p \mathrm{d}t \leqslant \varliminf_{k\to\infty} \int_a^b |f_n(t) - f_{n_k}(t)|^p \mathrm{d}t \leqslant \varepsilon^p, \tag{2.10}$$

则

$$f_n - f \in L^p[a,b],$$

故 $f=f_n+(f-f_n)\in L^p[a,b]$. 又由(2.10)可知，当 $n>N$ 时

$$\| f_n - f \|_p \leqslant \varepsilon,$$

所以 $f_n \to f$，$L^p[a,b]$是一个 Banach 空间．

定理 2.3 $L^p[a,b](1 \leqslant p < \infty)$是可分的．

证 本定理的证明分成三步进行．

(1) 设 $B[a,b]$是$[a,b]$上的有界可测函数全体，则 $B[a,b]$在 $L^p[a,b]$中稠密．对 $f \in L^p[a,b]$，作函数列

$$f_n(t) = \begin{cases} f(t), & |f(t)| \leqslant n, \\ 0, & |f(t)| > n. \end{cases}$$

则每个 $f_n(t)$是$[a,b]$上的有界可测函数，且

$$\int_a^b |f_n(t) - f(t)|^p \mathrm{d}t = \int_{E(|f|>n)} |f(t)|^p \mathrm{d}t.$$

因为 $f \in L^p[a,b]$，则

$$mE(|f| > n) \leqslant \frac{1}{n^p}\int_a^b |f(t)|^p \mathrm{d}m \to 0, \ (n \to \infty).$$

故存在自然数 N，使 $n>N$ 时，有

$$mE(|f| > n) < \delta.$$

再由积分的绝对连续性，对任一 $\varepsilon>0$，必有 $\delta>0$，使得当 $e \subset [a,b]$，$me<\delta$ 时，

$$\int_e |f(t)|^p \mathrm{d}t < \varepsilon^p,$$

故 $n>N$ 时，

$$\| f_n - f \|_p < \varepsilon.$$

这就证明了 $B[a,b]$在 $L^p[a,b]$中稠密．

(2) 按照 $\| \cdot \|_p$ 导出的距离，$C[a,b]$在 $B[a,b]$中稠密，从而 $C[a,b]$在 $L^p[a,b]$中稠密．

任取 $f \in B[a,b]$，设$|f(t)| \leqslant K(t \in [a,b])$，任取 $\varepsilon>0$，由第九章鲁金定理 3.2，对正数 $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{2K}\right)^p$，存在 $g(t) \in C[a,b]$，使得

$$mE(f \neq g) < \delta \text{ 以及 } |g(t)| \leqslant K \ (t \in [a,b]).$$

于是

$$\int_a^b |f(t) - g(t)|^p \mathrm{d}t = \int_{E(f \neq g)} |f(t) - g(t)|^p \mathrm{d}t$$

$$\leqslant (2K)^p \cdot \delta = \varepsilon^p,$$

故 C$[a,b]$按 $\|\cdot\|_p$ 导出的距离在 B$[a,b]$中稠密．

(3) 记 P_1 为以有理数为系数的多项式全体，按照 $\|\cdot\|_p$，P_1 在 C$[a,b]$中稠密．

事实上，首先由本章 §1 例 9，按 C$[a,b]$的范数，P_1 是 C$[a,b]$的可列稠密子集，则对任何 $f\in$ C$[a,b]$和 $\varepsilon>0$，存在 $p(t)\in P_1$，使得

$$\max_{a\leqslant t\leqslant b}|f(t)-p(t)|^p<\frac{\varepsilon^p}{b-a},$$

于是按照 $\mathrm{L}^p[a,b]$的范数 $\|\cdot\|_p$，有

$$\|f-p\|_p^p=\int_a^b|f(t)-p(t)|^p\mathrm{d}t<\varepsilon^p,$$

这说明按 $\|\cdot\|_p$，P_1 在 C$[a,b]$中稠密，于是由(1)，(2)可知 P_1 是 $\mathrm{L}^p[a,b]$的可数稠密子集，故 $\mathrm{L}^p[a,b]$是一个可分的 Banach 空间．

我们称定义在可测集 E 上的可测函数 f 是**本性有界的**，是指除去 E 中的某个零测度集外，f 是有界的，记

$$\mathrm{L}^\infty[a,b]=\{f(t)\text{ 在}[a,b]\text{ 上可测}:f\text{ 在}[a,b]\text{ 上本性有界}\},$$

$\mathrm{L}^\infty[a,b]$中几乎处处相等的函数看作同一元素．在 $\mathrm{L}^\infty[a,b]$中规定范数

$$\|f\|_\infty=\inf_{\substack{me=0\\ e\subset[a,b]}}\Big(\sup_{t\in[a,b]-e}|f(t)|\Big),\tag{2.11}$$

(2.11)右边也记作 $\operatorname{ess}\sup\limits_{t\in[a,b]}|f(t)|$，则 $\mathrm{L}^\infty[a,b]$是一个赋范线性空间．

我们首先指出(2.11)中的下确界 $\inf\limits_e$ 是可以达到的，即存在 $E_0\subset[a,b]$，$mE_0=0$，使 $\|f\|_\infty=\sup\limits_{t\in[a,b]-E_0}|f(t)|$.

事实上，根据 inf 的定义，对每个 n，有 $e_n\subset[a,b]$，使 $me_n=0$，以及

$$\sup_{t\in[a,b]-e_n}|f(t)|<\|f\|_\infty+\frac{1}{n}.$$

取 $E_0=\bigcup_{n=1}^{\infty} e_n$，则 $mE_0=0$，且

$$\|f\|_\infty \leqslant \sup_{[a,b]-E_0} |f(t)| \leqslant \sup_{[a,b]-e_n} |f(t)| \leqslant \|f\|_\infty + \frac{1}{n},$$

令 $n\to\infty$，就得到

$$\|f\|_\infty = \sup_{[a,b]-E_0} |f(t)|.$$

利用(2.11)容易证明 $L^\infty[a,b]$是一个线性空间以及 $\|\cdot\|_\infty$ 是 $L^\infty[a,b]$上的范数．我们只须证明

$$\|f+g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \qquad (f,g\in L^\infty[a,b]).$$

设 $f,g\in L^\infty[a,b]$，不妨设存在 $e_1,e_2\subset[a,b]$，$me_1=me_2=0$，使

$$\|f\|_\infty = \sup_{[a,b]-e_1} |f(t)|,\ \|g\|_\infty = \sup_{[a,b]-e_2} |g(t)|,$$

则

$$\begin{aligned}\|f+g\|_\infty &\leqslant \sup_{[a,b]-e_1\cup e_2} |f(t)+g(t)| \\ &\leqslant \sup_{[a,b]-e_1\cup e_2} |f(t)| + \sup_{[a,b]-e_1\cup e_2} |g(t)| \\ &\leqslant \sup_{[a,b]-e_1} |f(t)| + \sup_{[a,b]-e_2} |g(t)| \\ &= \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.\end{aligned}$$

定理 2.4　$L^\infty[a,b]$是一个 Banach 空间．

证　首先按照(2.11)易证 $L^\infty[a,b]$中 $\|f_n-f\|_\infty\to 0$ 等价于存在 $E_0\subset[a,b]$，使 $mE_0=0$，而在$[a,b]-E_0$ 上 $f_n(t)\Rightarrow f(t)$（几乎处处一致收敛）．现设$\{f_n\}$是 $L^\infty[a,b]$中的一个基本列，则对任给的 $\varepsilon>0$，存在自然数 N，使得当 $n,m\geqslant N$ 时，

$$\|f_n-f_m\|_\infty < \varepsilon.$$

由(2.11)式知存在 $E_{mn}\subset[a,b]$，使 $mE_{mn}=0$，且

$$\|f_n-f_m\|_\infty = \sup\{|f_n(t)-f_m(t)| : t\in[a,b]-E_{mn}\}.$$

记 $E=\bigcup_{m,n} E_{mn}$，则 $E\subset[a,b]$，$mE=0$，当 $t\in[a,b]-E$，且 $m,n\geqslant N$ 时

$$
\begin{aligned}
|f_n(t) - f_m(t)| &\leqslant \sup\{|f_n(t) - f_m(t)| : t \in [a,b] - E\} \\
&\leqslant \sup\{|f_n(t) - f_m(t)| : t \in [a,b] - E_{mn}\} \\
&< \varepsilon,
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

故当 $t\in[a,b]-E$ 时，$\{f_n(t)\}$是一基本的实数列，从而必收敛于某个实数 $f(t)$，任意定义 $f(t)$在 E 上之值，则 $f(t)$在$[a,b]$上可测，下面证明 $f(t)\in L^\infty[a,b]$，且 $\| f_n-f \|_\infty \to 0$, $(n\to\infty)$.

在(2.12)中固定 $n\geqslant N$，让 $m\to\infty$，得

$$
|f_n(t) - f(t)| \leqslant \varepsilon \ (\forall\, t \in [a,b] - E, n \geqslant N), \tag{2.13}
$$

因此，$f_n-f\in L^\infty[a,b]$，$f=f_n-(f_n-f)\in L^\infty[a,b]$，且

$$
\| f_n - f \|_\infty \leqslant \varepsilon, \ (n \geqslant N),
$$

所以 $\| f_n-f \|_\infty \to 0$, $(n\to\infty)$，$L^\infty[a,b]$是一个 Banach 空间.

类似于§1 中指出的有界可测函数 B[0,1]的不可分性（见§1 例 10），可以证明 $L^\infty[a,b]$是不可分的.

2.4 空间 $l^p(1\leqslant p<\infty)$和 l^∞

记满足 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k|^p < \infty$, $(1 \leqslant p < \infty)$ 的实（或复）数列 $x=\{x_k\}$全体为 l^p，对 l^p 中任意两个元素 $x=\{x_k\}$，$y=\{y_k\}$和数 $\alpha\in K$（实的或复的），规定

$$
x + y = \{x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n, \cdots\},
$$

$$
\alpha x = \{\alpha x_1, \alpha x_2, \cdots, \alpha x_n, \cdots\}.
$$

$\alpha x\in l^p$ 显然，因为

$$
\begin{aligned}
|x_k + y_k|^p &\leqslant (|x_k| + |y_k|)^p \\
&\leqslant 2^p(\max(|x_k|, |y_k|))^p \\
&\leqslant 2^p(|x_k|^p + |y_k|^p),
\end{aligned}
$$

所以

$$
\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p \leqslant 2^p\Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p + \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p\Big) < \infty,
$$

即 $x+y\in l^p$，故 l^p 是一个线性空间.

在 l^p 中，规定

$$\| x \|_p = (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p)^{1/p}. \tag{2.14}$$

定理 2.5 $l^p(1 \leqslant p < \infty)$按(2.14)规定的范数是一个可分的 Banach 空间.

证 不妨设 l^p 是实的数列空间.

(1) 首先利用引理 1 中的不等式(2.2)

$$\xi\eta \leqslant \frac{\xi^p}{p} + \frac{\eta^q}{q}, \ (\xi, \eta \geqslant 0, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p > 1)$$

来推导出数列形式的 Hölder 不等式和 Minkowski 不等式：

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \leqslant (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p)^{1/p} \cdot (\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q)^{1/q},$$

$$(p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1), \tag{2.15}$$

$$(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p)^{1/p} \leqslant (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p)^{1/p} + (\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p)^{1/p}, \ (p \geqslant 1). \tag{2.16}$$

事实上，不妨设 $\| x \|_p \neq 0$, $\| y \|_q \neq 0$，令

$$\xi = \frac{|x_k|}{\| x \|_p}, \ \eta = \frac{|y_k|}{\| y \|_q},$$

则得

$$\frac{|x_k y_k|}{\| x \|_p \cdot \| y \|_q} \leqslant \frac{|x_k|^p}{p \cdot \| x \|_p^p} + \frac{|y_k|^q}{q \cdot \| y \|_q^q}.$$

上式对一切 k 求和，即得

$$\frac{1}{\| x \|_p \cdot \| y \|_q} (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k|) \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

所以

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \leqslant \| x \|_p \cdot \| y \|_q,$$

$\| x \|_p = 0$ 或 $\| y \|_q = 0$ 时，不等式(2.15)显然成立.

为了证明(2.16)，类似于引理 3 证明，$p=1$ 时，(2.16)显然成立，故不妨设 $p>1$，$\|x+y\|_p\neq 0$. 因为 $x+y\in l^p$，所以数列$\{|x_k+y_k|^{p/q}\}$属于 l^q，注意到$\frac{p}{q}=p-1$，则

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k+y_k|^p=\sum_{k=1}^{\infty}|x_k+y_k|\cdot|x_k+y_k|^{p-1}$$
$$\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|\cdot|x_k+y_k|^{p/q}$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|\cdot|x_k+y_k|^{p/q},\qquad(2.17)$$

对(2.17)右边应用 Hölder 不等式(2.15)，得

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k+y_k|^p\leqslant\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k+y_k|^p\right)^{1/q}$$
$$\cdot\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^p\right)^{1/p}\right],$$

所以

$$\|x+y\|_p\leqslant\|x\|_p+\|y\|_p,$$

l^p 是一个赋范线性空间.

(2) 证明 l^p 的完备性.

设$\{x^{(n)}\}$是 l^p 中的任一基本列，其中

$$x^{(n)}=(x_1^{(n)},x_2^{(n)},\cdots,x_k^{(n)},\cdots).$$

则对任给的 $\varepsilon>0$，存在自然数 N，使得当 $n,m\geqslant N$ 时，有

$$\rho(x^{(n)},x^{(m)})=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i^{(n)}-x_i^{(m)}|^p\right)^{1/p}<\varepsilon,\qquad(2.18)$$

从而可知，对每个 i，数到$\{x_i^{(n)}\}$收敛，设$\lim\limits_{n\to\infty}x_i^{(n)}=x_i$，我们记

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_k,\cdots).$$

下面证明 $x\in l^p$，且 $\rho(x^{(n)},x)=\|x^{(n)}-x\|_p\to 0$，$(n\to\infty)$. 由(2.18)知对每一个自然数 k，当 $n,m\geqslant N$ 时，

$$\sum_{i=1}^{k}|x_i^{(n)}-x_i^{(m)}|^p<\varepsilon^p,\qquad(2.19)$$

在(2.19)中，固定$n\geqslant N$，令$m\to\infty$，得

$$\sum_{i=1}^{k}|x_i^{(n)}-x_i|^p<\varepsilon^p\qquad(k=1,2,3,\cdots).$$

再令$k\to\infty$，则

$$\sum_{i=1}^{\infty}|x_i^{(n)}-x_i|^p<\varepsilon^p\qquad(n\geqslant N).$$

从而当$n\geqslant N$时，$x-x^{(n)}\in l^p$，$x=(x-x^{(n)})+x^{(n)}\in l^p$，且

$$\|x^{(n)}-x\|_p\leqslant\varepsilon\qquad(n\geqslant N),$$

即$\|x^n-x\|_p\to 0(n\to\infty)$，故$l^p$是一个Banach空间.

(3) l^p的可分性.

令$E_0=\{x\in l^p:x=(r_1,r_2,\cdots,r_n,0,\cdots)$，每个$r_i$都是有理数，$1\leqslant i\leqslant n,n\in N\}$，则$E_0$是一个可列集，任取$x\in l^p$和$\varepsilon>0$，存在自然数$n$，使

$$\sum_{i=n+1}^{\infty}|x_i|^p<\frac{\varepsilon^p}{2},$$

对$i=1,2,\cdots,n$，存在有理数$r_1,r_2,\cdots,r_n$，使

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i-r_i|^p<\frac{\varepsilon^p}{2},$$

故存在$x_0=(r_1,r_2,\cdots,r_n,0,\cdots)\in E_0$，使

$$\|x-x_0\|_p^p=\sum_{i=1}^{n}|x_i-r_i|^p+\sum_{i=n+1}^{\infty}|x_i|^p<\varepsilon^p,$$

即

$$\rho(x,x_0)<\varepsilon,$$

这就证明了E_0是l^p的一个可数稠密子集，故l^p是可分的.

设l^∞是有界数列(实的或复的)全体按通常数列空间中线性运算所组成的线性空间，对$x\in l^\infty$，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$，令

$$\|x\|_\infty=\sup_{1\leqslant i<\infty}|x_i|,$$

则易知l^∞按$\|\cdot\|_\infty$是一个赋范线性空间.

我们还可以证明l^∞是一个不可分的Banach空间.关于l^∞的完备性读者作为练习自己写出，l^∞的不可分性可类似于本章§1

例 10 来证明．事实上，考察集合

$$E_0=\{\text{实数列}(\xi_i):\xi_i=0\text{ 或 }1,i=1,2,3,\cdots\},$$

则 $E_0\subset l^\infty$，E_0 的势为$\aleph$，且 $x,y\in E_0$，$x\neq y$ 时，$\rho(x,y)=1$．如果 l^∞ 可分，则存在可数集$\{y^{(k)}\}$在 l^∞ 中稠密，以 $y^{(k)}$ 为中心，$\frac{1}{3}$为半径作开球 $S\left(y^{(k)},\frac{1}{3}\right)$，$\{S\left(y^{(k)},\frac{1}{3}\}\right):k=1,2,3,\cdots\}$可列．因为

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}S\left(y^{(k)},\frac{1}{3}\right)\supset l^\infty,$$

则 E_0 中至少有二个元素，$x,y(x\neq y)$属于同一个开球$S\left(y^{(k)},\frac{1}{3}\right)$，于是

$$1=\rho(x,y)\leqslant\rho(x,y^{(k)})+\rho(y^{(k)},y)<\frac{2}{3},$$

矛盾，故 l^∞ 不可分．

如果 $p=1$ 时，记 $q=\infty$，则数列形式的 Hölder 不等式(2.15)

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_ky_k|\leqslant\|x\|_p\cdot\|y\|_q,$$

对 $p=1$ 也成立．

§3 紧　　性

我们知道，实数域除了完备性这一重要特性外，还有一个重要特性，就是任何有界无穷点列必有收敛子列，利用这个特性，在数学分析中可以证明有界闭区间上的连续函数的有界性、一致连续性等重要性质．分析中的许多重要定理如单调有界数列必有极限也要用它来证明．可以认为，实数空间的这个特性所反映的事实在分析中起着基本的作用．

自然要问：一般的距离空间是否也有这个特性吗？下面将会看到，在一般距离空间中，这个特性并不能保持．本节将讨论在一般距离空间中有界无穷集是否存在收敛子列，在距离空间中引进"列

紧”和“紧集”概念，给出了一些具体空间中列紧集的特征，最后将利用“列紧”的概念给出有限维空间的特征.

3.1 列紧集与全有界集

先看一个例子，它说明对于一般距离空间，有界点列未必有收敛子列.

例 1 设 $X=l^2$，令 $e_n=(0,0,\cdots,1,0,\cdots)$表示第 n 位坐标等于 1，其它坐标为 0 的元素($n=1,2,3,\cdots$)，则 $\rho(e_n,0)=1$，故$\{e_n\}$是 l^2 中的有界点列，但 $n\neq m$ 时，

$$\rho(e_n,e_m) = \sqrt{2},$$

故$\{e_n\}$不可能存在收敛子序列.

定义 3.1 设 X 为距离空间，无穷集 $A\subset X$，如果 A 的任一无穷点列必有收敛子序列，则称 A 为**列紧集**(或**相对紧集**)；如果 X 本身列紧，则称 X 为**列紧距离空间**，简称为**列紧空间**；如果 A 为列紧闭集则称 A 为**自列紧集**.

由定义 3.1 容易得到下面几个简单性质：

1° 列紧集的子集也是列紧的，如果$\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$是一族自列紧集，则$\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$ 也是自列紧集，

2° 列紧空间是完备的，

3° 如果 A 列紧，则 $\overline{A}$ 自列紧.

我们证明性质 2°和 3°. 设$\{x_n\}$是列紧空间 X 中的基本列，由列紧性，可取出子序列$\{x_{n_k}\}$，使 $x_{n_k}\to x_0\in X$. 因为

$$\rho(x_n,x_0)\leqslant\rho(x_n,x_{n_k})+\rho(x_{n_k},x_0),$$

且$\{x_n\}$是基本列，故 $\rho(x_n,x_0)\to 0$，X 完备.

现设 A 列是紧，任取$\{x_n\}\subset\overline{A}$，对每个 n，由于 $x_n\in\overline{A}$，则存在 $y_n\in A$，使

$$\rho(x_n,y_n)<\frac{1}{n}.$$

因为 A 列紧，可取子序列 $\{y_{n_k}\}$，使 $y_{n_k}\to y\in\overline{A}$，从而 $x_{n_k}\to y$，$\overline{A}$ 自列紧．

定义 3.2 设 X 为距离空间，$A,B\subset X$，给定 $\varepsilon>0$，如果

$$\bigcup_{x\in B}S(x,\varepsilon)\supset A,$$

则称 B 是 A 的一个 ε 网；如果对任意的正数 ε，A 总存在有穷的 ε 网 B，则称 A 是**完全有界集或全有界集**．

应当注意，在定义中，并未要求 B 是 A 的子集，但是可以证明：如果 A 是全有界集，则对任何 $\varepsilon>0$，必存在 $B\subset A$，使得 B 是 A 的有穷 ε 网．

事实上，对 $\varepsilon>0$，先取 A 的有穷 $\frac{\varepsilon}{2}$ 网 $\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$，当 $A\cap S\left(y_k,\frac{\varepsilon}{2}\right)\neq\varnothing$ 时，取 $x_k\in A\cap S\left(y_k,\frac{\varepsilon}{2}\right)$，则这些 x_k 便组成 A 的有穷 ε 网．

定理 3.1 全有界集必有界，而且是可分的．

证 (1) 设 A 全有界，取 $\varepsilon=1$，取 A 的有穷 1 网 $\{x_1,x_2,\cdots,x_{n_0}\}$，则

$$A\subset\bigcup_{k=1}^{n_0}S(x_k,1).$$

对每个 $x\in A$，必有 x_k，$(1\leqslant k\leqslant n_0)$ 使

$$\rho(x,x_k)<1,$$

因此

$$\begin{aligned}\rho(x,x_1)&\leqslant\rho(x,x_k)+\rho(x_k,x_1)\\&<1+\max_{1\leqslant k\leqslant n_0}\rho(x_k,x_1),\end{aligned}$$

所以 A 是有界集．

(2) 设 A 全有界，B_n 是 A 的有穷 $\frac{1}{n}$ 网，不妨设 $B_n\subset A$. 令 $B=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$，$B$ 是可列集，我们证明 B 在 A 中稠密．事实上，对任一 $x\in A$ 和自然数 n，因为

$$A \subset \bigcup_{x \in B_n} S\left(x, \frac{1}{n}\right),$$

则存在 $x_n \in B_n$，使 $x \in S\left(x_n, \frac{1}{n}\right)$，即 $\rho(x, x_n) < \frac{1}{n}$，从而得到点列 $\{x_n\} \subset B$，使 $x_n \to x$，B 在 A 中稠密．

应当指出 A 有界不一定全有界．读者可以证明本节例 1 中的点列 $\{e_n\}$ 组成的集 A 在 l^2 中不是全有界的．

下面的定理给出了列紧和全有界的关系．

定理 3.2 设 X 为距离空间，$A \subset X$，如果 A 列紧，则 A 必全有界；又若 X 是完备的距离空间，则当 A 全有界时，A 必定是列紧集．因此在完备距离空间中，列紧性与全有界性等价．

证 (1) 设 A 是距离空间 X 中的列紧集，但不全有界，则存在 $\varepsilon_0 > 0$，使 A 没有有穷 ε_0 网．任取 $x_1 \in A$，必存在 $x_2 \in A$，使 $\rho(x_1, x_2) \geqslant \varepsilon_0$，否则 $\{x_1\}$ 就是 A 的有穷 ε_0 网．同理，存在 $x_3 \in A$，使 $\rho(x_i, x_3) \geqslant \varepsilon_0 (i = 1, 2)$，…，由此，可得到 A 中点列 $\{x_n\}$，当，$m \neq n$ 时，

$$\rho(x_m, x_n) \geqslant \varepsilon_0,$$

这种点列显然不存在收敛子序列，这与 A 的列紧性矛盾，故 A 全有界．

(2) 现设 X 完备，$A \subset X$ 全有界，B 为 A 的任一无穷子集，取 $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$，$n = 1, 2, 3, \cdots$，对 ε_1，A 有有穷 ε_1 网，则存在有穷个半径为 ε_1 的开球之并覆盖 A，当然也覆盖 B，故 B 中必有一无穷子集，包含在这些开球的某一个中，记这个开球为 $S_1(y_1, \varepsilon_1)$，令 $B_1 = B \cap S_1$，则 B_1 是 A 的无穷子集，$B_1 \dot{\subset} S_1(y_1, \varepsilon_1)$. 重复使用上面的方法，存在开球 $S_2(y_2, \varepsilon_2)$，使 $B_1 \cap S_2$ 为无穷集，令

$$B_2 = B_1 \cap S_2, B_2 \subset S_2(y_2, \varepsilon_2).$$

依此类推，我们可得到一列无穷集

$$B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \cdots \supset B_n \supset \cdots,$$

以及一列开球 $S_1(y_1, \varepsilon_1), S_2(y_2, \varepsilon_2), \cdots, S_n(y_n, \varepsilon_n), \cdots$，满足

$$B_n \subset S_n, S_n \text{ 的半径 } \varepsilon_n = \frac{1}{n} \to 0.$$

任取 $x_1 \in B_1, x_2 \in B_2 - \{x_1\}, \cdots, x_n \in B_n - \{x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}\}$, $\cdots$,得到点列$\{x_n\}$,由 $B_n \subset S_n$ 以及 $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \cdots$,知对任一 n 以及任一 $m > n$,有

$$x_m, x_n \in S_n(y_n, \varepsilon_n),$$

则

$$\rho(x_m, x_n) < \frac{2}{n}, \ (m > n).$$

$\{x_n\}$是基本列,X 完备,故$\{x_n\}$必收敛于 X 中某一点,即 A 是列紧的.

推论 设 X 是完备的距离空间,$A \subset X$,则 A 为列紧集的充要条件是对任给的 $\varepsilon > 0$,A 存在列紧的 ε 网.

证 必要性是显然的,因为 A 列紧时,A 本身就是它的一个列紧 ε 网.充分性,设对任给的 $\varepsilon > 0$,A 存在列紧的$\frac{\varepsilon}{2}$网 B,因为 B 列紧,按照定理 3.2,B 必全有界,B 有有穷的$\frac{\varepsilon}{2}$网 C,则 C 为 A 的有穷 ε 网,故 A 全有界,由于 X 完备,A 必列紧.

3.2 紧集

数学分析中,一个有界闭区间的任一开覆盖必可取出有限开覆盖.本段将考察,距离空间中自列紧集与"有限开覆盖"的关系.设 A 是距离空间 X 的子集,如果 $\mathscr{F} = \{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$是 X 中的一族开集,使 $A \subset \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$,则称 $\mathscr{F}$ 为 A 的一个**开覆盖**.如果 $\mathscr{F} = \{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$中元素的个数是有限的,则称 $\mathscr{F}$ 为 A 的一个有限开覆盖.

定义 3.3 设 X 为距离空间,$A \subset X$,如果从 A 的任一开复盖$\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$中可取出有限开覆盖,则称 A 为**紧集**;如果空间 X 本身是紧的,则称 X 为**紧距离空间**,或简称为**紧空间**.

定理 3.3 设 X 为距离空间,$A \subset X$,则 A 为自列紧集的充要

条件是 A 为紧集.

证 必要性分两步进行证明:

(1) 证明从 A 的任一开覆盖 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 中可取出可列开复盖 $\{G_{\alpha_n}\}_{n=1}^{\infty}$. 设 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 A 的任一开覆盖,因为 A 自列紧,必可分,记 $B=\{x_1,x_2\cdots x_n\cdots\}$ 为 A 的可列稠密子集. 任取 $x\in A$,则存在某个 G_α,使 $x\in G_\alpha$,G_α 为开集,故存在 $\varepsilon>0$,使 $S(x,\varepsilon)\subset G_\alpha$. 又因为 $\overline{B}\supset A$,故必存在 $x_k\in B$,使 $\rho(x,x_k)<\frac{\varepsilon}{4}$. 取有理数 r,使

$$\frac{\varepsilon}{4}<r<\frac{\varepsilon}{2},$$

则 $x\in S(x_k,r)\subset S(x,\varepsilon)\subset G_\alpha$. 因为

$$\{S(x_k,r):x_k\in B,r\text{ 为有理数}\}$$

至多可列,$x\in A$ 是任取的,故可取出至多可列个开球 $\{S(x_k,r)\}$ 复盖 A,其中 $S(x_k,r)\subset$ 某个 G_α. 将 $\{S(x_k,r)\}$ 重新编号得 $S_1,S_2,\cdots,S_n,\cdots$,相应地有 $G_{\alpha_1}G_{\alpha_2},\cdots,G_{\alpha_n},\cdots,S_k\subset G_{\alpha_k}$,则

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}G_{\alpha_k}\supset A.$$

(2) 证明从可列复盖 $\{S_k\}$ 可取出有限开覆盖,从而 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 可取出有限开覆盖. 设不然,则对任一自然数 l,$A-\bigcup_{k=1}^{l}S_k$ 为无穷集,故对每一个 l,存在 $y_l\in A-\bigcup_{k=1}^{l}S_k$,这样就得到了 A 的一个无穷点列 $\{y_l\}$. 由于 A 自列紧,则存在子序列 $y_{l'}\to y_0\in A$. 我们容易证明 $y_0\overline{\in}S_k(k=1,2,\cdots)$,这与 $\bigcup_{k=1}^{\infty}S_k\supset A$ 矛盾,故存在 l_0,使 $A\subset\bigcup_{k=1}^{l_0}S_k$, 相应地有

$$\bigcup_{k=1}^{l_0}G_{\alpha_k}\supset A.$$

充分性: 设 A 为紧集. 任取无穷点列 $\{x_n\}\subset A$,设不存在子序列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于 A 中一点,则对每一个 $y\in A$,存在 $\delta_y>0$,使 $S(y,\delta_y)$(除去 y 本身外)不含 $\{x_n\}$ 的点. 因为

$$\bigcup_{y\in A} S(y,\delta_y) \supset A \supset \{x_n\},$$

由 A 的紧性，可取出有限个开球 $S(y_1,\delta_{y_1}),S(y_2,\delta_{y_2}),\cdots S(y_k,\delta_{y_k})$复盖 A，因此$\{x_n\}$中至多有有限个点属于 A，矛盾，故 A 自列紧．

在§3.1，§3.2 中，我们引进了四个概念：列紧性，自列紧性，全有界性和紧性，并讨论了它们之间的关系．在本书中，这四个概念都是对无穷集来说的，如果要将有限集的情形包括在内，只需将“无穷”两字去掉，并且在用到点列的地方，允许它可以只含有有限个不同的元素(于是有的元素在点列中将出现无穷多次)，那么全部概念和论证都是有效的．

3.3 具体空间中集合列紧性的判别法

在一些具体问题中往往需要刻划出某些空间中列紧集的特征，本段我们将以 R^n,$C[a,b]$为例来说明处理这类问题的方法．

例 2 R^n 中点集 A 是列紧集的充要条件是 A 为有界集．

证 由定理 3.2，A 列紧必全有界，再由定理 3.1 知 A 必有界，反之，设 A 为 R^n 中的有界集．任取 A 中点列$\{x^{(k)}\}$，其中

$$x^{(k)} = (x_1^{(k)},x_2^{(k)},\cdots,x_n^{(k)}).$$

设

$$\| x^{(k)} \| \leqslant M \ (k = 1,2,3,\cdots),$$

则对 $i=1,2,\cdots,n$，

$$|x_i^{(k)}| \leqslant \| x^{(k)} \| \leqslant M,$$

所以对每个 $i=1,2,\cdots,n$，$\{x_i^{(k)}\}$是 R 中的有界点列，从而存在子序列$\{k_m\}$，使

$$x_i^{(k_m)} \to x_i \qquad (i = 1,2,\cdots,n).$$

令 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，则易知

$$\| x^{(k_m)} - x \| \to 0 \ (k_m \to \infty),$$

故 A 是列紧集．

为了讨论 $C[a,b]$中点集的列紧性，我们先引入一个概念．

设 A 是$[a,b]$上一族实值连续函数，如果对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对任意两点 $t,t'\in[a,b]$，当$|t-t'|<\delta$ 时，对一切 $x(t)\in A$ 成立

$$|x(t)-x(t')|<\varepsilon,$$

则称 A 是**等度连续**的．

例 3 $C[a,b]$中集合列紧的条件．

定理 3.4 (Arzela-Ascoli) $A\subset C[a,b]$为列紧集的充要条件是 A 为有界集，且为等度连续的函数族．

证 必要性：设 A 是列紧集，因为列紧集必有界，所以必须证明 A 的等度连续性．

对任给的 $\varepsilon>0$，存在 A 的$\frac{\varepsilon}{3}$网 $x_1(t),x_2(t),\cdots x_{n_0}(t)$. 因为每个 $x_k(t)\in C[a,b]$ $(k=1,2,\cdots,n_0)$，故存在 $\delta>0$，当 $t,t'\in[a,b]$，$|t-t'|<\delta$ 时，有

$$|x_k(t)-x_k(t')|<\frac{\varepsilon}{3}\ (k=1,2,\cdots,n_0), \tag{3.1}$$

任取 $x(t)\in A$，因为

$$A\subset\bigcup_{k=1}^{n_0}S\left(x_k,\frac{\varepsilon}{3}\right),$$

则存在 $k(1\leqslant k\leqslant n_0)$，使 $x\in S\left(x_k,\frac{\varepsilon}{3}\right)$，即

$$|x(t)-x_k(t)|<\frac{\varepsilon}{3}\ (t\in[a,b]), \tag{3.2}$$

故当$|t-t'|<\delta$ 时，由(3.1)，(3.2)立即得

$$\begin{aligned}|x(t)-x(t')|&\leqslant|x(t)-x_k(t)|\\&\quad+|x_k(t)-x_k(t')|+|x_k(t')-x(t')|\\&<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.\end{aligned}$$

对一切 $x(t)\in A$ 成立，从而 A 等度连续．

充分性：设 A 是 $C[a,b]$中有界点集，而且又是等度连续的．

因为$C[a,b]$是完备的，据定理3.2，只须证明A是全有界集．

对任给的$\varepsilon>0$，由A的等度连续性，存在$\delta>0$，使得当$t,t'\in[a,b]$，$|t-t'|<\delta$时，对一切$x(t)\in A$，有

$$|x(t)-x(t')|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.3}$$

取n，使$\frac{b-a}{n-1}<\delta$，将$[a,b]$ $(n-1)$等分，分点为$a=t_1<t_2<\cdots<t_n=b$. 令

$$A_n=\{z=(x(t_1),x(t_2),\cdots,x(t_n)):x(t)\in A\},$$

由A的有界性知A_n是R^n中的有界集，据例2，A_n是R^n中的全有界集，即有$x_1(t),x_2(t),\cdots,x_k(t)\in A$，使$A_n$中$k$个点

$$Z^{(j)}=(x_j(t_1),x_j(t_2),\cdots,x_j(t_n)),j=1,2,\cdots,k,$$

组成A_n的$\frac{\varepsilon}{3}$网．现在我们证明$\{x_1(t),x_2(t),\cdots,x_k(t)\}$是$A$的$\varepsilon$网．事实上，任取$x(t)\in A$，由$Z=(x(t_1),x(t_2),\cdots,x(t_n))\in A_n$，所以存在$j(1\leqslant j\leqslant k)$，使

$$\rho(Z^{(j)},Z)=(\sum_{i=1}^{n}|x_j(t_i)-x(t_i)|^2)^{1/2}<\frac{\varepsilon}{3}, \tag{3.4}$$

因此

$$|x(t_i)-x_j(t_i)|<\frac{\varepsilon}{3},i=1,2,\cdots,n, \tag{3.5}$$

对于$t\in[a,b]$，设$t\in[t_i,t_{i+1}]$，据(3.3)，(3.5)立即得

$$\begin{aligned}|x(t)-x_j(t)|&\leqslant|x(t)-x(t_i)|\\&\quad+|x(t_i)-x_j(t_i)|+|x_j(t_i)-x_j(t)|\\&<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,\end{aligned}$$

因此

$$\rho(x,x_j)=\|x-x_j\|<\varepsilon,$$

$\{x_1(t),x_2(t),\cdots,x_k(t)\}$是$A$的$\varepsilon$网，故$A$必列紧．

应当指出，在很多情况下刻划列紧集的特征是比较复杂的和十分困难的，例如，我们还可以证明：

空间 $L^p[a,b](1<p<\infty)$中集合 A 列紧的充要条件是下列两个条件满足：

(1) 存在常数 K，使对任意的 $x(t)\in A$，有 $\|x\|_p\leqslant K$，即

$$\int_a^b |x(t)|^p \mathrm{d}t \leqslant K^p.$$

(2) 对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，只要 $0<h<\delta$，就有

$$\rho(x_h,x) = \|x_h - x\|_p < \varepsilon,$$

对一切 $x(t)\in A$ 成立，其中

$$x_h(t) = \frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h} x(s)\mathrm{d}s \qquad (t\in[a,b],h>0).$$

由于上式右端积分用到 $x(t)$在$[a,b]$之外的值，为此，我们补充规定 $t\overline{\in}[a,b]$时，$x(t)=0$.

由于这一结论的证明较为复杂，我们把它略去，有兴趣的读者可参阅文献[6]，[7].

3.4 紧集上的连续映射

我们现在把闭区间上连续函数的性质拓广到距离空间紧集上的连续映射上来.

定理 3.5 设 X,X_1 均为距离空间，$A\subset X$ 是紧集，f 是 A 到 X_1 中的连续映射，则 f 的象 $B=f(A)=\{f(x):x\in A\}$也是 X_1 中的紧集.

证 设$\{y_n\}\subset B$，相应地有 A 中的点列$\{x_n\}$，使得 $y_n=f(x_n)$，$n=1,2,\cdots$，因为 A 是紧集，所以存在子序列$\{x_{n_k}\}$，使 $x_{n_k}\to x_0\in A$，利用 f 的连续性，立即得

$$\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)\in B,$$

所以 $B=f(A)$是紧集.

从这个定理的证明也可以知道：距离空间 X 上的连续映射必然把列紧集映为列紧集.

定理 3.6 设 A 是距离空间 X 中的紧集，f 是定义在 A 上的

实值连续函数，则 f 在 A 上必有界，而且可达到上、下确界．

证 由定理 3.5，$f(A)$是实数空间 R 中的紧集，所以 $f(A)$是 R 中的有界点集，又 $f(A)$是 R 中的紧集等价于 $f(A)$是列紧闭集，故 $f(A)$是 R 中的有界闭集，从而 $f(A)$的上确界 y_1 及下确界 y_2 均属于 $f(A)$，即存在 $x_1,x_2\in A$，使得

$$y_1 = f(x_1) = \sup_{x\in A} f(x), \quad y_2 = f(x_2) = \inf_{x\in A} f(x).$$

定义 3.4 设 X,Y 都是距离空间，$A\subset X,B\subset Y$，如果映射 T 是 A 到 B 上的一对一映射，并且 T 及其逆映射 T^{-1}都是连续的，则称 T 是 A 到 B 上的**拓扑映射**，称 A 和 B 是**同胚**的．

定理 3.7 设 A,B 分别是距离空间 X,Y 中的紧集，T 是 A 到 B 上的一对一连续映射，则 T 必是拓扑映射．

证 由定义 3.4，我们只要证明 T^{-1}是连续的，按照本章 §1 中的定理 1.7，只要证明 T^{-1}的逆映射 T 把 A 的任一闭子集 F 映成闭集．因为 A 是紧集，所以它的闭子集 F 也是紧集，由定理 3.5 知 $T(F)$是紧集，从而 $T(F)$也是闭集，这就证明了 T^{-1}是连续的，故 T 是拓扑映射．

读者还可以证明紧集上的连续映射必是一致连续的，这一结论的证明留给读者作为练习写出．

3.5 有限维赋范线性空间

n 维欧几里得空间 R^n 中任何有界闭集都是紧集，这个性质不但可以推广到任意有限维赋范线性空间上去，而且它还是有限维赋范线性空间的特征．本段将讨论这一问题，为此，我们先定义线性空间维数的概念．

定义 3.5 设 X 为线性空间，如果 X 中存在 n 个线性无关的元素 $e_1,e_2,\cdots,e_n$，使对任意的 $x\in X$，有

$$x = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k, \tag{3.6}$$

则称$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$为 X 的**基底**，n 称为 X 的**维数**，$c_1,c_2,\cdots,c_n$ 称作

x 关于这一基底的**坐标**,这时称 X 为**有限维(n 维)线性空间**,不是有限维的线性空间称为**无穷维线性空间**.

在线性代数中已经证明,有限维线性空间基底不唯一,但维数 n 是不变的,例如 R^n 一个 n 维线性空间,$e_1=(1,0,\cdots,0),\cdots,e_n=(0,\cdots,0,1)$ 是 R^n 的一个基底,而 $e_1,e_2'=(1,1,0,\cdots,0),e_3,\cdots,e_n$ 也是 R^n 的一个基底.C$[a,b]$是一个无穷维线性空间,这是因为对任何自然数 n,C$[a,b]$中都有 n 个线性无关的元素 $1,t,t^2,\cdots,t^{n-1}$ 存在,因此不可能存在某个自然数 n_0 以及 n_0 个线性无关向量,使 C$[a,b]$中任一元素都可表成这 n_0 个元素的线性组合.

下面我们将证明:

1° n 维赋范线性空间 X_n 必定与 n 维欧几里得空间 R^n 拓扑同构(即代数同构且拓扑同胚),从而可知有限维赋范线性空间必是 Banach 空间.

2° X_n 为有限维赋范线性空间的充要条件是 X_n 的任一有界集是列紧集.

定理 3.8 设$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$是 n 维赋范线性空间 X_n 的一组基底,则存在正数 C_1,C_2,使得对一切 $x=\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k\in X_n$,有

$$C_2\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2\right)^{1/2}\leqslant\|x\|\leqslant C_1\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2\right)^{1/2}. \qquad (3.7)$$

证 对任一 $x\in X_n$,

$$\begin{aligned}\|x\|&=\left\|\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k\right\|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|\cdot\|e_k\|\\&\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}\|e_k\|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2\right)^{1/2}\\&=C_1\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2\right)^{1/2},\end{aligned} \qquad (3.8)$$

其中

$$C_1=\left(\sum_{k=1}^{n}\|e_k\|^2\right)^{1/2}.$$

另一方面，任取 $y=\sum_{k=1}^{n}\eta_k e_k\in X_n$，由不等式(3.8)可得

$$\big|\,\|x\|-\|y\|\,\big|\leqslant\|x-y\|\leqslant C_1\Big(\Big(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k-\eta_k|^2\Big)^{1/2}. \tag{3.9}$$

将$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$看作 R^n 中的元素，考察 R^n 中的单位球面 S：

$$S=\Big\{(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n):\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2=1\Big\},$$

和 S 上的函数

$$f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=\Big\|\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k\Big\|=\|x\|,$$

则(3.9)表明 $f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$是 S 上的连续函数，显然 f 在 S 上恒大于零．由于 S 是 R^n 中的有界闭集，从而是紧集，由本节定理3.6，f 在 S 上可取到最小值 C_2，$C_2>0$，即对一切 $x=\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k$，其中$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in S$，有

$$\|x\|\geqslant C_2.$$

对任一非零元素 $x\in X_n$，$x=\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k$，令

$$\widetilde{x}=\frac{x}{\Big(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2\Big)^{1/2}}=\sum_{k=1}^{n}\eta_k e_k,$$

其中

$$\eta_k=\frac{\xi_k}{\Big(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2\Big)^{1/2}},$$

则$(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)\in S$，所以

$$\|\widetilde{x}\|\geqslant C_2.$$

于是

$$\|x\|=\Big(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2\Big)^{1/2}\|\widetilde{x}\|\geqslant C_2\Big(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2\Big)^{1/2},$$

故不等式(3.7)成立．

由本定理可以知道有限维赋范线性空间 X_n 中的收敛等价于相应于它的基底的坐标收敛；有限维赋范线空间 X_n 的任何范数彼此等价，即假设 $\|\cdot\|$ 和 $\|\cdot\|_1$ 是 X_n 上的两个范数，则存在 $C_1, C_2 > 0$，使得对一切 $x \in X_n$，有

$$C_2 \|x\|_1 \leqslant \|x\| \leqslant C_1 \|x\|_1.$$

推论 1 设 X_n 为 n 维赋范线性空间，则 X_n 与 R^n 同构且同胚(或称拓扑同构).

证 设 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是 X_n 的一个基底，$x \in X_n$，令

$$x = \sum_{k=1}^{n} \xi_n e_k.$$

将 $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 看作 R^n 中的点，作 X_n 到 R^n 的映射 T：

$$Tx = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n),$$

则显然 T 是 X_n 到 R^n 上的同构映射，由定理 3.8 的(3.7)式知 T，T^{-1} 均是连续映射，故 X_n 与 R^n 同构且同胚．

推论 2 有限维赋范线性空间必为 Banach 空间，从而任一赋范线性空间的有限维子空间一定是闭子空间．

证 读者容易证明：如果赋范线性空间 X 和 X_1 拓扑同构，则 X 完备等价于 X_1 完备．由推论 1，n 维赋范线性空间 X_n 与 R^n 拓扑同构，所以 X_n 一定是 Banach 空间．

设 E_0 是赋范线性空间 X 的有限维子空间，则 E_0 必完备，故 E_0 是 X 的闭子空间．

我们指出，如果 X 和 X_1 仅仅是(拓扑)同胚，则不一定有结论：X 完备等价于 X_1 完备．例如 $X = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$，$X_1 = R = (-\infty, +\infty)$，$T: X \to X_1$ 定义如下：

$$Tx = \operatorname{tg} x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

则 T 是 $X \to X_1$ 上的同胚映射，X_1 完备，但 X 不完备．

为了讨论有限维赋范线性空间的特征，我们先证明下面的结论.

引理 （黎斯[F. Riesz]） 设 E_0 是赋范线性空间 X 的真闭子空间，则对任给的 $\varepsilon>0(0<\varepsilon<1)$，必存在 $x_0\in X$，使 $\|x_0\|=1$ 以及

$$\rho(x_0,E_0)=\inf_{x\in E_0}\|x_0-x\|\geqslant 1-\varepsilon.$$

证 任取 $x_1\in X-E_0$，并令

$$d=\inf_{x\in E_0}\|x_1-x\|=\rho(x_1,E_0).$$

因为 E_0 是 X 的闭子空间，故 $d>0$. 又因为 $\frac{d}{1-\varepsilon}>d$，故存在 $x_1'\in E_0$，使 $\|x_1-x_1'\|<\frac{d}{1-\varepsilon}$. 再令

$$x_0=\frac{x_1-x_1'}{\|x_1-x_1'\|},$$

则 $\|x_0\|=1$，对任意的 $x\in E_0$，

$$\|x-x_0\|=\left\|x-\frac{x_1-x_1'}{\|x_1-x_1'\|}\right\|$$

$$=\frac{1}{\|x_1-x_1'\|}\|(\|x_1-x_1'\|x+x_1')-x_1\|.$$

注意到 $x,x'_1\in E_0$，则 $\|x_1-x_1'\|x+x_1'\in E_0$，于是

$$\|(\|x_1-x_1'\|x+x_1')-x_1\|\geqslant d,$$

$$\|x-x_0\|\geqslant\frac{d}{\|x_1-x_1'\|}>\frac{d}{\frac{d}{1-\varepsilon}}=1-\varepsilon\quad(\forall x\in E_0),$$

故 $\rho(x_0,E_0)=\inf\limits_{x\in E_0}\|x-x_0\|\geqslant 1-\varepsilon$.

定理 3.9 赋范线性空间 X 为有限维的充要条件是 X 的任一有界子集都是列紧的.

证 必要性：设 X 为 n 维，由定理 3.8，X 与 R^n 拓扑同构，因为 R^n 中任一有界集列紧，则容易证明 X 中的任一有界子集是列紧集.

充分性：用反证法，设 X 为无限维，令 S 为 X 中的单位球面，

$$S = \{x \in X: \| x \| = 1\},$$

按条件 S 列紧．任取 $x_1 \in S$，记

$$X_1 = \{\alpha x_1: \alpha \in K\},$$

则 X_1 是 X 的一维真闭子空间，由黎斯引理，存在 $x_2 \in S$．使

$$\| x_2 - x \| \geqslant \frac{1}{2},$$

对一切 $x \in X_1$ 成立，故

$$\| x_2 - x_1 \| \geqslant \frac{1}{2}.$$

记 X_2 为 x_1, x_2 张成的子空间，X_2 必为 X 的真闭子空间，仍由黎斯引理，存在 $x_3 \in S$，使对一切 $x \in X_2$ 成立

$$\| x_3 - x \| \geqslant \frac{1}{2},$$

特别地，有

$$\| x_3 - x_i \| \geqslant \frac{1}{2},\ (i = 1, 2)$$

依此类推，根据 X 为无穷维空间的假设，可以作出 S 中的一列元素 $x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots$，使得

$$\| x_k - x_l \| \geqslant \frac{1}{2},\ (k \neq l).$$

显然 $\{x_k\}$ 中不存在收敛子序列，这与 S 列紧性相矛盾，故 X 必是有限维的．

例 4　设 X、Y 是两个距离空间，映射 $f: X \to Y$，试证明 f 是连续映射的充要条件是对 X 中任何紧集 A，$f|A: A \to Y$ 是连续的．

证　只要证明充分性．设 $\{x_n\} \subset X$，$x_n \to x_0 \in X$，记

$$A = \{x_n: n = 0, 1, 2, \cdots\}$$

则 A 中任何点列必有收敛于 x_0 的子列，从而 A 是 X 的紧集，由假设，$f|_A: A \to Y$ 是连续的，从而 $f(x_n) \to f(x_0)$．这表明对任何 $x_n \to x_0$，均有 $f(x_n) \to f(x_0)$，因此 $f: X \to Y$ 是连续的．

例 5 设 X 是距离空间,证明 X 是紧的充要条件是:对 X 的任意一族闭集 $\{F_\alpha:\alpha\in I\}$,如果其中任意有限个 F_α 的交集都为非空集,则 $\bigcap\limits_{\alpha\in I}F_\alpha$ 也必为非空集.

证 必要性:设 X 为紧空间,$\{F_\alpha:\alpha\in I\}$ 是 X 的一族闭集,且其中任意有限个 F_α 的交集均非空,今证 $\bigcap\limits_{\alpha\in I}F_\alpha\neq\varnothing$. 设不然,即 $\bigcap\limits_{\alpha\in I}F_\alpha=\varnothing$,于是

$$X = X-\bigcap_{\alpha\in I}F_\alpha=\bigcup_{\alpha\in I}(X-F_\alpha).$$

注意到 $X-F_\alpha$ 是开集,上式表明 $\{X-F_\alpha:\alpha\in I\}$ 是 X 的一个开覆盖,由 X 的紧性,必存在有限开覆盖,即有 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in I$,使

$$X=\bigcup_{i=1}^{n}(X-F_{\alpha_i}).$$

于是

$$\varnothing = X-\bigcup_{i=1}^{n}(X-F_{\alpha_i})=\bigcap_{i=1}^{n}F_{\alpha_i},$$

这与假设矛盾,所以 $\bigcap\limits_{\alpha\in I}F_\alpha\neq\varnothing$.

充分性:设 $\{G_\alpha:\alpha\in I\}$ 是 X 的任一个开覆盖,因为 $X=\bigcup\limits_{\alpha\in I}G_\alpha$,所以

$$\varnothing = X-\bigcup_{\alpha\in I}G_\alpha=\bigcap_{\alpha\in I}(X-G_\alpha).$$

注意到 $\{X-G_\alpha:\alpha\in I\}$ 是 X 中的一族闭集,则由充分性假设,必存在 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in I$,使 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}(X-G_{\alpha_i})=\varnothing$,于是

$$X = X-\bigcap_{i=1}^{n}(X-G_{\alpha_i})=\bigcup_{i=1}^{n}G_{\alpha_i},$$

这就证明了 X 的任何开覆盖必有有限开覆盖,所以 X 是紧空间.

§4 压缩映射原理及其应用

在代数方程,微分方程和积分方程等各类方程的讨论中,确定解的存在性、唯一性以及近似解的收敛性是十分重要的. 对于一些具体方程,在讨论过程中往往可以把它变为求某一映射的不动

点.

例如一阶常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y), \tag{4.1}$$

注意到求微分方程(4.1)满足初始条件 $y|x_0=y_0$ 的解与求解积分方程

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,y(t))\mathrm{d}t \tag{4.2}$$

等价.为了求解积分方程(4.2),我们可以根据 $f(x,y)$所满足的条件适当地取一个距离空间,并在这个距离空间中作映射:

$$(T\varphi)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t)\mathrm{d}t.$$

于是求方程(4.1)的解转化为求函数 φ,使它满足 $T\varphi=\varphi$,这种 φ 称为 T 的**不动点**.

在本节中,我们介绍一种比较简单但又比较基本的不动点定理——压缩映射原理,并讨论了它的一些应用,还介绍了 Banach 空间中凸紧集上连续映射的不动点定理.

4.1 Banach 不动点定理

定义 4.1 设 T 为距离空间 X 到它自身的一个映射,如果存在数 θ,$0\leqslant\theta<1$,使得对一切 $x,y\in X$ 成立

$$\rho(Tx,Ty) \leqslant \theta\rho(x,y), \tag{4.3}$$

则称 T 为 X 上的**压缩映射**.

显然压缩映射 T 是连续映射.

设 X 为一集合,T 是 X 到自身的一个映射,如果有 $x^* \in X$,使得

$$Tx^* = x^*,$$

则称 x^*为映射 T 的**不动点**.

对 $x\in X$,记 $T^2x=T(Tx)$,依次我们可定义映射 $T^n(n=1,2,$

3…).

定理 4.1 （压缩映射原理） 完备距离空间 X 中的压缩映射 T 必有唯一的不动点，且对任意的 $x_0\in X$，$x_n=T^n x_0$ 收敛于 T 的唯一不动点．

证 我们用"逐次逼近法"来求 T 的不动点．任取 $x_0\in X$，令

$$x_1=Tx_0, x_2=Tx_1,\cdots,x_{n+1}=Tx_n,\cdots,$$

我们证明 $\{x_n\}$ 是 X 中的基本列．事实上，对 $n\geqslant 1$，有

$$\rho(x_{n+1},x_n)=\rho(Tx_n,Tx_{n-1})\leqslant\theta\rho(x_n,x_{n-1}), \qquad (4.4)$$

反复应用(4.4)，就有

$$\begin{aligned}\rho(x_{n+1},x_n)&\leqslant\theta\rho(x_n,x_{n-1})\leqslant\theta^2\rho(x_{n-1},x_{n-2})\leqslant\cdots\\&\leqslant\theta^n\rho(x_1,x_0),\end{aligned} \qquad (4.5)$$

于是对任一自然数 p，有

$$\begin{aligned}\rho(x_n,x_{n+p})&\leqslant\rho(x_n,x_{n+1})+\rho(x_{n+1},x_{n+2})+\cdots\\&\quad+\rho(x_{n+p-1},x_{n+p})\\&\leqslant(\theta^n+\theta^{n+1}+\cdots+\theta^{n+p-1})\rho(x_0,x_1)\\&\leqslant\frac{\theta^n}{1-\theta}\rho(x_0,x_1),\end{aligned} \qquad (4.6)$$

因为 $0\leqslant\theta<1$，故 $\{x_n\}$ 是 X 中的基本列，由 X 的完备性，$\{x_n\}$ 有一极限 x^*，$x^*=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$. 在等式 $x_{n+1}=Tx_n$ 中令 $n\to\infty$，利用 T 的连续性，立即得

$$x^*=Tx^*,$$

即 x^* 是 T 的不动点．

现在证明 x^* 的唯一性，设 y^* 也是 T 的不动点，则

$$\rho(x^*,y^*)=\rho(Tx^*,Ty^*)\leqslant\theta\rho(x^*,y^*),$$

由于 $\theta<1$，所以必有 $\rho(x^*,y^*)=0$，故 $x^*=y^*$.

因为 $x_n=Tx_{n-1}=\cdots=T^n x_0$，所以对任意的 $x_0\in X$，$x_n=T^n x_0$ 收敛于 T 的唯一不动点．

值得注意，方程 $Tx=x$ 的精确解在大多数情况下是不易求得的，但定理 4.1 告诉我们，可以用 x_n(即第 n 次近似)作为这个方程

的近似解，于是需要估计 x_n 与精确解 x^* 的误差．在(4.6)式中令 $p\to\infty$，便得误差估计公式：

$$\rho(x_n,x^*)\leqslant\frac{\theta^n}{1-\theta}\rho(x_1,x_0). \tag{4.7}$$

注 鉴于压缩映射原理的重要性，我们再对定理 4.1 的条件作以下几点说明：

(1) 定理 4.1 中 X 的完备性条件不能除去．例如 $X=(0,1]$，$\rho(x,y)=|x-y|$，T 是如下的映射：

$$Tx=\frac{1}{2}x,\ x\in(0,1].$$

显然 T 是 X 到 X 的压缩映射，但 $Tx=x$ 在 $(0,1]$ 中无解，即在 X 中不存在 T 的不动点．

(2) T 为压缩映射的条件 $\rho(Tx,Ty)\leqslant\theta\rho(x,y)$，$0\leqslant\theta<1$ 不能减为

$$\rho(Tx,Ty)<\rho(x,y)\ (x,y\in X,x\neq y).$$

例如 $X=[0,+\infty)$，X 为完备的距离空间，T 定义为

$$Tx=x+\frac{1}{1+x},\ x\in[0,\infty).$$

当 $x\neq y$，$x,y\in[0,+\infty)$ 时，

$$\begin{aligned}\rho(Tx,Ty)&=\left|x+\frac{1}{1+x}-y-\frac{1}{1+y}\right|\\&=\left(1-\frac{1}{(1+x)(1+y)}\right)|x-y|\\&<\rho(x,y).\end{aligned}$$

但 T 在 $[0,+\infty)$ 中设有不动点．

定理 4.1 有如下的推广形式．

定理 4.2 设 T 是完备距离空间 X 到 X 中的映射，如果存在自然数 n_0，使得 T^{n_0} 为 X 上的压缩映射，即存在 $0\leqslant\theta<1$，使

$$\rho(T^{n_0}x,T^{n_0}y)\leqslant\theta\rho(x,y)\ (x,y\in X), \tag{4.8}$$

则 T 在 X 中必有唯一的不动点．

证 令 $S=T^{n_0}$，按照定理 4.1，S 在 X 中有唯一不动点 x^*，现在我们来证明 x^* 也是 T 的唯一不动点．事实上，由于

$$ST = T^{n_0+1} = TS,$$

所以 $STx^*=TSx^*=Tx^*$，即 Tx^* 也是 S 的不动点，由 S 的不动点的唯一性知

$$Tx^* = x^*,$$

故 x^* 也是 T 的不动点．若 y^* 是 T 的另一个不动点，则

$$T^{n_0}y^* = T^{n_0-1}(Ty^*) = T^{n_0-1}y^* = \cdots = y^*,$$

故 y^* 也是 S 的不动点，因此 $y^*=x^*$，即 T 的不动点唯一．

根据"Trans. Math. Soc. 226(1977)147—159"，我们还可以知道，在定理 4.2 的条件下同样有结论：对任一 $x_0\in X$. $x_n=T^nx_0$ 收敛于 T 的唯一不动点．

***定理 4.3** 设 F 为距离空间 X 中的紧集，T 是 F 到 F 中的映射，如果 T 满足条件：

$$\rho(Tx,Ty) < \rho(x,y) \quad (x \neq y, x, y \in F) \tag{4.9}$$

则 T 在 F 中存在唯一不动点，且对任一 $x_0\in F$，$x_n=T^nx_0$ 必收敛于 T 在 F 中的唯一不动点．

证 (1) 令 $\varphi(x)=\rho(Tx,x)$，先证明 φ 是 F 上的连续函数．任取 $x_n,x\in F$，$x_n\to x$（不妨设 $x_n\neq x$），$\varphi(x_n)=\rho(Tx_n,x_n)$. 由条件 (4.9)

$$\rho(Tx_n,Tx) < \rho(x_n,x),$$

故 T 是连续映射．又因为距离是两个变元的连续函数，当 $x_n\to x$ 时，$Tx_n\to Tx$，所以 $\varphi(x_n)=\rho(Tx_n,x_n)\to\rho(Tx,x)=\varphi(x)$，$\varphi$ 连续．

(2) 当 $x\neq Tx$ 时，

$$\varphi(Tx) = \rho(T^2x,Tx) < \rho(Tx,x) = \varphi(x). \tag{4.10}$$

现任取 $x_0\in F$，令 $x_n=T^nx_0$，由于 $\{x_n\}\subset F$，F 是紧集，则存在子序列

$$x_{n_k} \to x^* \in F.$$

因为 φ 连续，则

$$\varphi(x_{n_k}) \to \varphi(x^*), \varphi(x_{n_{k+1}}) = \varphi(Tx_{n_k}) \to \varphi(Tx^*).$$

据(4.10)

$$\varphi(x_{n+1}) = \varphi(Tx_n) \leqslant \varphi(x_n), n = 1,2,3,\cdots,$$

$\{\varphi(x_n)\}$是非负下降数列，必收敛，故 $\varphi(x^*)=\varphi(Tx^*)$，再由(4.10)立即得

$$x^* = Tx^*.$$

(3) 唯一性：设有 $x'\in F$，使 $Tx'=x'$，且 $x'\neq x^*$，则

$$\rho(x^*,x') = \rho(Tx^*,Tx') < \rho(x^*,x'),$$

这是不可能的，故 $x^*=x'$，不动点必唯一，从而易知$\{x_n\}$收敛于 T 在 F 中的唯一不动点．

今后，我们称满足(4.9)的映射 T 为**广义压缩映射**．

如果 $f(x)$是有穷闭区间$[a,b]\to[a,b]$的连续函数，$f(x)$在(a,b)内可导，且$|f'(x)|<1(x\in(a,b))$，则由微分学中值定理知 f 是$[a,b]$到$[a,b]$的广义压缩映射，按照定理 4.3，f 在$[a,b]$中存在唯一不动点，且对任一 $x_0\in[a,b]$，序列 $x_n=f(x_{n-1})(n=1,2,3\cdots)$收敛于 f 在$[a,b]$中的不动点．

4.2 压缩映射原理的应用

压缩映射原理在一些方程解的存在唯一性定理的证明中起着重要作用，在本段中我们举例来说明它的应用．

例 1 （隐函数存在定理） 设 $f(x,y)$在带状区域 $D=\{(x,y):a\leqslant x\leqslant b,-\infty<y<+\infty\}$中处处连续，且处处有偏导数 $f'_y(x,y)$，如果存在常数 $m,M,0<m<M$，使

$$m \leqslant f'_y(x,y) \leqslant M,\ (x,y)\in D,$$

则方程 $f(x,y)=0$ 在$[a,b]$上必有唯一的连续解 $y=\varphi(x)$，即有 $\varphi(x)\in C[a,b]$，使得

$$f(x,\varphi(x)) \equiv 0,\ x\in[a,b].$$

证 在完备距离空间 $C[a,b]$中作映射 T：

$$(Ty)(x) = y(x) - \frac{1}{M}f(x,y(x)),\ y(x) \in \mathrm{C}[a,b].$$

显然$Ty(x)\in\mathrm{C}[a,b]$，T是$\mathrm{C}[a,b]$到自身的映射．今证T是压缩映射．任取$y_1(x),y_2(x)\in\mathrm{C}[a,b]$，根据微分学中值定理，存在$0<\tilde{\theta}<1$，

$$\begin{aligned}|Ty_2(x) - Ty_1(x)| &= |y_2(x) - y_1(x) \\ &\quad - \frac{1}{M}[f(x,y_2(x)) - f(x,y_1(x))]| \\ &= |y_2(x) - y_1(x) - \frac{1}{M}f'_y(x,y_1(x) \\ &\quad + \tilde{\theta}\,(y_2(x) - y_1(x)))(y_2(x) - y_1(x))| \\ &\leqslant (1 - \frac{m}{M})|y_2(x) - y_1(x)|.\end{aligned}$$

令$\theta=1-\frac{m}{M}$，则$0<\theta<1$，

$$\rho(Ty_2,Ty_1) \leqslant \theta\rho(y_2,y_1),$$

因此，T是压缩映射．由定理4.1，存在唯一的$\varphi(x)\in\mathrm{C}[a,b]$，使$T\varphi=\varphi$，即

$$f(x,\varphi(x)) \equiv 0,\ a \leqslant x \leqslant b.$$

从例1的证明可以看出，为了应用压缩映射原理来证明某方程解的存在唯一性，关键在于找到适当的距离空间，并在此空间上定义适当的映射，使得该映射的不动点与方程的解相一致．只要空间完备，映射是压缩的，就可应用压缩映射原理．

例2 （线性方程解的存在、唯一性） 设n个未知数$x_1,x_2,\cdots,x_n$的n个线性方程组

$$x = Cx + b, \tag{4.11}$$

其中$C=(C_{ij})$为$n\times n$实矩阵，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$，$b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)'$．如果满足条件

$$\sum_{j=1}^{n}|C_{ij}| < 1,\ (i = 1,2,\cdots,n), \tag{4.12}$$

则方程(4.11)有唯一解 x^*，这个解 x^* 等于迭代序列

$$x^{(m+1)} = Cx^{(m)} + b, \ (m = 0,1,2,\cdots) \tag{4.13}$$

的极限，其中 $x^{(0)}=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})$ 是 R^n 中任取的一元素．

证 取完备距离空间 $X=R^n$，R^n 中的距离规定为

$$\rho(x,z) = \max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i - z_i|,$$

其中 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n$，$z=(z_1,z_2,\cdots,z_n)\in R^n$，并在 X 中作映射 T：

$$y = Tx = Cx + b.$$

即

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} C_{ij}x_j + b_i, i = 1,2,\cdots,n.$$

可是

$$\rho(Tx,Tz) = \max_i\left|\sum_{j=1}^{n} C_{ij}(x_j - z_j)\right|$$

$$\leqslant \max_i|x_i - z_i| \cdot \max_i\sum_{j=1}^{n}|C_{ij}|,$$

所以

$$\rho(Tx,Tz) \leqslant \theta\rho(x,z),$$

其中 $\theta = \max\limits_i\sum\limits_{j=1}^{n}|C_{ij}| < 1$．由定理 4.1 立即知结论成立．

对于一般的线性方程组

$$Ax = b, \tag{4.14}$$

其中 $A=(a_{ij})$ 是 $n\times n$ 实矩阵，$b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)'$．如果 $a_{ii}\neq 0$，$(i=1,2,\cdots,n)$，我们可记 $A=B-G$，其中

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

则方程(4.14)就可变为(4.11)的形式：

$$x = Cx + b,$$

其中 $C=B^{-1}G=B^{-1}(B-A)$，$b=B^{-1}b$，迭代序列变为

$$x_i^{(m+1)} = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j^{(m)}),\ (i = 1,2,\cdots,n),$$

称作为 jacobi 迭代法．收敛条件(4.12)变为

$$\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|,\ (i = 1,2,\cdots,n). \tag{4.15}$$

粗略地讲，如果 A 的主对线上的元素充分大时，收敛性就可得到保证．

例 3 （微分方程解的存在、唯一性） 考察微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y),y|x_0 = y_0, \tag{4.16}$$

其中 $f(x,y)$在整个平面内连续(这个条件较强，但我们的目的是介绍方法，而不是追求条件的完美)，并设 $f(x,y)$关于 y 满足李普希兹条件：

$$|f(x,y) - f(x,y')| \leqslant K|y - y'|,$$

则通过点(x_0,y_0)微分方程(4.16)有一条且只有一条积分曲线．

证 微分方程(4.16)等价于下面的积分方程

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,y(t))\mathrm{d}t.$$

我们取 $\delta>0$，使 $\theta=K\delta<1$，记 $X=\mathrm{C}[x_0-\delta,x_0+\delta]$，在 X 中定义映射 T：

$$(Ty)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,y(t))\mathrm{d}t,y(x) \in X.$$

则

$$\begin{aligned}\rho(Ty_1,Ty_2) &= \max_{|x-x_0|\leqslant\delta}\left|\int_{x_0}^{x}[f(t,y_1(t)) - f(t,y_2(t))]\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \max_{|x-x_0|\leqslant\delta}\left|\int_{x_0}^{x}K|y_1(t) - y_2(t)|\mathrm{d}t\right.\end{aligned}$$

$$\leqslant K\delta \max_{|x-x_0|\leqslant\delta} |y_1(x) - y_2(x)|$$

$$= \theta\rho(y_1, y_2).$$

因为 $0\leqslant\theta<1$，由定理 4.1，存在唯一的连续函数 $y(x)\in C[x_0-\delta, x_0+\delta]$，使

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\mathrm{d}t.$$

由上式可以看出，$y(x)$ 还是连续可微的，故 $y=y(x)$ 是微分方程 (4.16) 通过点 (x_0, y_0) 的积分曲线，但它只定义在 $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ 上．重复利用定理 4.1，可以将它延拓到整个数轴上．

例 4 （积分方程解的存在、唯一性） 设 $f\in L^2[a,b]$，$K(t,s)$ 是定义在 $a\leqslant t\leqslant b, a\leqslant s\leqslant b$ 上的可测函数，且满足

$$\int_a^b\int_a^b |K(t,s)|^2 \mathrm{d}t\mathrm{d}s = K_0^2 < \infty,$$

则当 $|\lambda|<\dfrac{1}{K_0}$ 时，方程

$$x(t) = f(t) + \lambda\int_a^b K(t,s)x(s)\mathrm{d}s \tag{4.17}$$

在 $L^2[a,b]$ 中有唯一解 $x(t)$.

证 在 $L^2[a,b]$ 中定义映射 T：

$$(Tx)(t) = f(t) + \lambda\int_a^b K(t,s)x(s)\mathrm{d}s.$$

由条件，易知 $(Tx)(t)\in L^2[a,b]$，因此 T 是 $L^2[a,b]$ 到其自身的映射，对任意的 $x(t), y(t)\in L^2[a,b]$，

$$\rho(Tx, Ty) = |\lambda|\{\int_a^b |\int_a^b K(t,s)(x(s) - y(s))\mathrm{d}s|^2 \mathrm{d}t\}^{1/2}$$

$$\leqslant |\lambda|\{\int_a^b [\int_a^b |K(t,s)|^2 \mathrm{d}s]\cdot[\int_a^b |x(s) - y(s)|^2 \mathrm{d}s]\mathrm{d}t\}^{1/2}$$

$$= |\lambda|\{\int_a^b |x(s) - y(s)|^2 \mathrm{d}s\}^{1/2}\cdot\{\int_a^b\int_a^b |K(t,s)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}t\}^{1/2}$$

$$= |\lambda| K_0\rho(x, y).$$

令 $\theta=|\lambda|K_0$，当 $|\lambda|<\frac{1}{K_0}$ 时，$0\leqslant\theta<1$，

$$\rho(Tx,Ty)\leqslant\theta\rho(x,y),$$

即 T 为压缩映射，故方程(4.17)在 $L^2[a,b]$ 内有唯一解．

例 5 (伏泰拉[Volterra]积分方程) 设 $K(t,s)$ 是定义在 $a\leqslant t\leqslant b, a\leqslant s\leqslant b$ 上的连续函数，则 Volterra 积分方程

$$x(t)=f(t)+\lambda\int_a^t K(t,s)x(s)\mathrm{d}s, \qquad (4.18)$$

对任何 $f(t)\in C[a,b]$ 以及任何参数 λ 存在唯一的连续解 $x(t)$.

证 考察 $C[a,b]$ 到 $C[a,b]$ 的映射 T：

$$Tx(t)=f(t)+\lambda\int_a^t K(t,s)x(s)\mathrm{d}s,$$

则方程(4.18)之解 $x(t)$ 等价于 x 满足 $Tx=x$. 我们证明存在自然数 n，使 T^n 为压缩映射．

任取 $x_1(t),x_2(t)\in C[a,b]$，设 $|K(t,s)|\leqslant M,(t,s)\in[a,b]\times[a,b]$，则

$$\begin{aligned}|Tx_1(t)-Tx_2(t)|&=|\lambda|\cdot\left|\int_a^t K(t,s)(x_1(s)-x_2(s))\mathrm{d}s\right|\\&\leqslant|\lambda|M(t-a)\max_{a\leqslant t\leqslant b}|(x_1(t)-x_2(t)|\\&=|\lambda|M(t-a)\rho(x_1,x_2),\qquad t\in[a,b].\end{aligned}$$

用归纳法容易证明，当 $t\in[a,b]$ 时

$$|T^nx_1(t)-T^nx_2(t)|\leqslant|\lambda|^nM^n\frac{(t-a)^n}{n!}\rho(x_1,x_2),$$

则

$$\rho(T^nx_1,T^nx_2)\leqslant|\lambda|^nM^n\frac{(b-a)^n}{n!}\rho(x_1,x_2).$$

对任何 λ，总可选取足够大的自然数 n，使

$$\theta=\frac{1}{n!}|\lambda|^nM^n(b-a)^n<1.$$

于是由定理 4.2，T 在 $C[a,b]$ 中有唯一的不动点，即方程(4.18)有唯一的连续解．

下面再举几个例子说明压缩映射原理在古典分析中的应用.

例 6 验证方程 $x^3+4x-2=0$ 在$[0,1]$上有实根,并用迭代法求此方程在$[0,1]$上的近似解.

解 因为方程 $x^3+4x-2=0$ 等价于 $x=\frac{1}{4}(2-x^3)$,这就启发我们考察映射 $f:[0,1]\to[0,1]$

$$f(x)=\frac{1}{4}(2-x^3).$$

因为 $f'(x)=\frac{-3}{4}x^2$,由中值定理,对任意的 $x,y\in[0,1]$,有

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{3}{4}|x-y|,$$

所以 f 是压缩映射,又因为 $X=[0,1]$是完备空间,按照定理 4.1,存在唯一的 $\xi\in[0,1]$,使 $f(\xi)=\xi$,显然 ξ 是方程 $x^3+4x-2=0$ 在$[0,1]$上的唯一解.

令 $x_0=0,x_1=f(x_0)=\frac{1}{2},\cdots,x_{n+1}=f(x_n)=\frac{1}{4}(2-x_n^3),\cdots$可以得到 ξ 的近似值 x_n,按照(4.7)式,有误差估计

$$|x_n-\xi|\leqslant\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1-\frac{3}{4}}|x_1-x_0|=2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

例 7 设有数列 $x_1=1+\frac{1}{x_0},x_2=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x_0}},\cdots$

$$x_n=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots1+\cfrac{1}{x_0}}},\quad(n=1,2,3,\cdots),\ (4.19)$$

其中 $x_0\in[1,+\infty)$,试证明对任意的 $x_0\in[1,+\infty)$数列$\{x_n\}$收敛于$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

证 考察$[1,2]\to[1,2]$中的映射 f:

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x}, x \in [1,2].$$

易知

$$x_1 = f(x_0) = 1 + \frac{1}{x_0} \in [1,2],$$

$$x_2 = f(x_1) = 1 + \frac{1}{x_1} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x_0}} \in [1,2], \cdots$$

$$x_n = f(x_{n-1}) = \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \cdots 1 + \frac{1}{x_0}}} \in [1,2], \ (n = 1,2,,\cdots).$$

由于当 $x \in (1,2)$ 时，$|f'(x)| = |\frac{-1}{x^2}| < 1$，由微分学中值定理，得

$$|f(x) - f(y)| < |x - y| (x \neq y, x, y \in [1,2]).$$

所以 f 是 $[1,2] \to [1,2]$ 的广义压缩映射，又因为 $[1,2]$ 是紧空间，则据定理 4.3 $\{x_n\}$ 收敛于 f 在 $[1,2]$ 中的唯一不动点，记 $\lim_{n\to\infty} x_n = x$，则 $x \in [1,2]$，且 $x = 1 + \frac{1}{x}$，故 $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

*4.3 凸紧集上的不动点定理

不动点定理及其在非线性算子方程解的存在、唯一性方面的应用是非线性泛函分析的一个重要内容，在 § 4.1 中介绍的压缩映射原理是一个最基本的不动点定理，它是 Banach 1922 年得到的．现在，人们利用拓扑空间的一些概念和方法，已经把不动点定理大大地推广了．本段将介绍一下应用较为广泛的赋范线性空间中紧凸集上连续映射的 Schauder 不动点定理．

定义 4.2 设 X 为线性空间，$A \subset X$.

(1) 如果对 A 中任意两点 x, y，线段 $\{\alpha x + (1-\alpha) y : 0 \leqslant \alpha \leqslant 1\} \subset A$，则称 A 为**凸集**；

(2) 记 $h(A)=\{\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n: x_i\in A, \alpha_i\geqslant 0, i=1, 2,\cdots,n$, 且 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1\}$, 称 $h(A)$ 为 A 的**凸包**.

显然 $h(A)$ 是凸集,且是包含 A 的最小凸集. 如果 X 还是一个距离空间,则一个凸集 A 的闭包 $\overline{A}$ 是凸闭集.

定理 4.4 (Schauder) 设 X 是赋范线性空间, $A\subset X$ 是一个凸紧集, T 是 $A\rightarrow A$ 的连续映射,则必有 $x\in A$, 使 $Tx=x$.

定理 4.5 (Schauder) 设 X 是 Banach 空间, $A\subset X$ 是凸闭集, T 是 $A\rightarrow A$ 的连续映射,并且 T 的象 $T(A)$ 是列紧集,则必有 $x\in A$, 使 $Tx=x$.

由于这两个定理的证明较为复杂,我们把它略去,有兴趣的读者可参阅文献[15]和[7].

§5 内积空间

在§2中我们介绍了赋范线性空间,对 n 维欧几里得空间 R^n 来说,向量的范数等于向量的长度(模),但在 R^n 中还有一个更基本的概念:两个向量的点积 a·b. 由向量的点积不但可导出向量的模 $|a|=\sqrt{a\cdot a}$, 而且可以引出两个向量直交的概念. R^n 中两个向量 a,b 直交等价于 a 与 b 的点积 $a\cdot b=0$. 因此提出了这样的问题,能否将点积和正交性概念推广到任意的线性空间中. 本节介绍的内积空间就是欧几里得空间的自然推广,内积概念就是 R^n 中点积的推广.

我们将看到,内积空间是特殊的赋范线性空间,从历史上看,内积空间和 Hilbert 空间(完备的内积空间)早于赋范线性空间,整个理论最初为希尔伯特(D. Hilbert (1912))在研究积分方程中给出,它的理论更为丰富,而且保持了许多欧几里得空间的特性,其中心概念是正交性.

5.1 内积空间的定义及其性质

定义 5.1 设 X 为实数域(或复数域)K 上的线性空间,如果对 X 中任意一对元素 x,y,都有 K 中一个数(x,y)与之对应,使对任何元素 x,y,z 以及 $\alpha\in K$ 有

(1) $(\alpha x,y)=\alpha(x,y)$,

(2) $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$,

(3) $(x,y)=\overline{(y,x)}$,

(4) $(x,x)\geqslant 0$,且$(x,x)=0$ 等价于 $x=0$,

则称 X 为**实(或复)的内积空间**,简称为**内积空间**,(x,y)称为 x 和 y 的**内积**.

由内积的定义,不难证明下列事实:

1° $(x,\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2)=\overline{\alpha_1}(x,y_1)+\overline{\alpha_2}(x,y_2)$,

2° 当 $y=0$ 或 $x=0$ 时,$(x,y)=0$,

例如,设 $y=0$,则$(x,y)=(x,0\cdot y)=0\cdot(x,y)=0$.

3° 对任一$x\in X$,如果令 $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$,则 X 按 $\|\cdot\|$ 是一个赋范线性空间,

范数性质(1),(2)显然满足,只需证明 $\|\cdot\|$ 满足不等式

$$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|\quad(x,y\in X).$$

为此,我们先证明下面的**施瓦兹**(Schwartz) 不等式:

$$|(x,y)|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|\quad(x,y\in X).\tag{5.1}$$

不妨设$(x,y)\neq 0$,令

$$\theta=\frac{(x,y)}{|(x,y)|},$$

则对任何实数 λ,

$$0\leqslant(\bar\theta x+\lambda y,\bar\theta x+\lambda y)=\lambda^2(y,y)+2\lambda|(x,y)|+(x,x),$$

故

$$|(x,y)|^2\leqslant(x,x)\cdot(y,y).$$

即

$$|(x,y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\| .$$

由(5.1)得

$$\|x+y\|^2 = (x+y,x+y) = (x+y,x) + (x+y,y)$$
$$\leqslant \|x+y\|(\|x\| + \|y\|).$$

所以

$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

因此，X 按照范数 $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ 是一个赋范线性空间，称范数 $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ 是由内积$(,)$导出的范数．

4° 内积(x,y)是 x,y 的连续函数，即当 $x_n \to x_0, y_n \to y_0$ 时，$(x_n,y_n) \to (x_0,y_0)$，

事实上，由于收敛点到$\{y_n\}$必有界，则

$$|(x_n,y_n) - (x_0,y_0)|$$
$$\leqslant |(x_n,y_n) - (x_0,y_n)| + |(x_0,y_n) - (x_0,y_0)|$$
$$\leqslant \|x_n - x_0\| \cdot \|y_n\| + \|x_0\| \cdot \|y_n - y_0\| \to 0.$$

5° 内积与范数有下列基本关系(**极化恒等式**)：

$$(x,y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)，\text{当 } K \text{ 为实数域，} \tag{5.2}$$

$$(x,y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2)，\text{当 } K \text{ 为复数域，} \tag{5.3}$$

(5.2)和(5.3)可以根据内积定义直接验证．有了这两个关系，当我们关于范数获得了某些结论时，往往可以容易地将它推广到内积上去．

我们称无穷维的完备内积空间为**希尔伯特空间**，希尔伯特空间通常用 H 表示．

例 1 复欧几里得空间 C^n 是一个完备内积空间，其内积定义为

$$(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \bar{\eta}_k, \tag{5.4}$$

其中 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)\in C^n$. 由(5.4)导出的范数为

$$\|x\| = (\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2)^{1/2}.$$

例 2　$L^2[a,b]$，对于 $f,g\in L^2[a,b]$，规定

$$(f,g) = \int_a^b f(t)\,\overline{g(t)}\mathrm{d}t, \tag{5.5}$$

容易验证(,)确实是 $L^2[a,b]$上的内积，由这个内积导出的范数就是我们在 $L^2[a,b]$上引进的范数，所以 $L^2[a,b]$是一个可分的 Hilbert 空间．

例 3　l^2，对于 l^2 中任意两个元素 $x=(\xi_k)$和 $y=(\eta_k)$，规定

$$(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\bar{\eta}_k, \tag{5.6}$$

易知 l^2 是一个可分的 Hilbert 空间．

例 4　设 $T=[0,1]$，记

$l^2(T)=\{a(t):a(t)$是定义在 T 上的复值函数，至多有可数个点使 $a(t)\neq 0$，且 $\sum_{t\in T}|a(t)|^2<\infty\}$.

$l^2(T)$中线性运算按通常的函数空间中那样定义，规定内积

$$(a(t),b(t)) = \sum_{t}a(t)\,\overline{b(t)}, \tag{5.7}$$

则 $l^2(T)$是不可分的 Hilbert 空间．

证　容易验证 $l^2(T)$是一个线性空间，按(5.7)定义的内积是 $l^2(T)$上的一个内积．下面证明 $l^2(T)$的完备性和不可分性．

完备性：任取$\{a_n(t)\}\subset l^2(T)$为基本列，记$\{t_1,t_2,\cdots,t_k,\cdots\}$为使 $a_n(t)\neq 0(n=1,2,3,\cdots)$的点，任给 $\varepsilon>0$，存在自然数 N，使得 $n,m>N$ 时，有

$$\|a_n(t)-a_m(t)\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty}|a_n(t_i)-a_m(t_i)|^2<\varepsilon^2,$$

故对每一个 i，$\{a_n(t_i)\}$收敛，记

$$a(t)=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}a_n(t_i),\ t=t_i,i=1,2,3,\cdots,\\0,\qquad\qquad t\neq t_i,\end{cases}$$

则类似于 l^2 完备性的证明方法，我们可以证明

$$a(t)\in l^2(T)，且\ \|a_n(t)-a(t)\|\to 0(n\to\infty).$$

故 $l^2(T)$是完备的.

不可分性：设 $l^2(T)$可分，则存在 $B=\{a_n(t)\}$为 $l^2(T)$的可数稠子集，令 $E=\{t\in[0,1]:a_n(t)\neq 0,n=1,2,3,\cdots\}$，则 E 为可数集. 取定 $t_0\in[0,1]-E$，再令

$$b(t)=\begin{cases}1,\quad t=t_0,\\0,\quad t\neq t_0,\end{cases}$$

则 $b(t)\in l^2(T)$，$\rho(a_n(t),b(t))\geqslant 1\ (n=1,2,3,\cdots)$，这与$\{a_n(t)\}$是 $l^2(T)$的稠密子集矛盾，故 $l^2(T)$是不可分的 Hilbert 空间.

我们知道，对内积空间 X，如果令 $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$，则 X 成为一个赋范线性空间，它的范数 $\|\cdot\|$ 由内积导出. 反过来，对于赋范线性空间，是否能成为一内积空间，且范数就是由内积导出的.

定理 5.1 赋范线性空间 X 成为内积空间，并使其范数由内积导出的充要条件是

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2).\tag{5.8}$$

证 必要性：由内积和范数的关系以及内积的诸条件.

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2+\|x-y\|^2&=(x+y,x+y)+(x-y,x-y)\\&=2(x,x)+2(y,y)\\&=2(\|x\|^2+\|y\|^2).\end{aligned}$$

充分性：我们知道，如果范数有内积导出，则极化恒等式成立，这启发我们对实赋范线性空间，规定

$$(x,y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2),$$

对复赋范线性空间，规定

$$(x,y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2$$

$$+i\|x+iy\|^2-i\|x-iy\|^2).$$

然后验证上面定义的内积满足内积的四个条件．条件(3)$(x,y)=\overline{(y,x)}$和条件(4)$(x,x)\geqslant 0$且$(x,x)=0\Leftrightarrow x=0$可由内积的规定直接得到，主要证明上面定义的内积(,)满足条件(1) $(\alpha x,y)=\alpha(x,y)$和条件(2) $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$．证明的依据是公式(5.8)，虽然这一证明并未用到太多的知识，但由于较为繁复，故而此处略去，有兴趣的读者可参阅文献[6].

当X是二维实内积空间时，等式(5.8)的意义就是：平行四边形的对角线长度的平方和等于四边的长度平方和，见图 11.2. 所以对一般内积空间，等式(5.8)称为**平行四边形公式**(或**中线公式**).

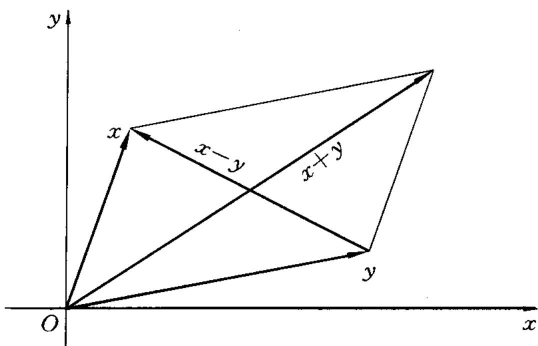


图 11.2

一般赋范线性空间中任何二个向量不一定满足平行四边形公式(5.8)，所以不是内积空间的赋范线性空间确实存在，现举例说明如下：

例 5 C$[a,b]$按$\|x\|=\max\limits_{t\in[a,b]}|x(t)|$不能成为内积空间，使范数由内积导出．

事实上，令$x(t)\equiv 1, y(t)=\dfrac{t-a}{b-a}$，则$x(t),y(t)\in$ C$[a,b]$，且$\|x\|=\|y\|=1$，由于$x(t)+y(t)=1+\dfrac{t-a}{b-a}, x(t)-y(t)=1-$

$\frac{t-a}{b-a}$,所以 $\|x+y\|=2$, $\|x-y\|=1$,不满足(5.8),故 $C[a,b]$ 不是内积空间.

例 6 当 $p\neq 2$ 时,l^p 不能成为内积空间,使范数由内积导出.

事实上,令 $x=(1,1,0\cdots)$,$y=(1,-1,0,\cdots)$,则 $x,y\in l^p$,且 $\|x\|=\|y\|=2^{1/p}$,但 $\|x+y\|=\|x-y\|=2$,所以不满足(5.8),故 $l^p(p\neq 2)$不是内积空间.

同样可证,当 $p\neq 2$ 时,$L^p[a,b]$不是内积空间.

5.2 直交和直交分解定理

在欧几里得空间中,利用两个向量的点积可以定义两个向量的夹角,从而得到两个向量直交的充要条件是它们的点积等于零.在一般内积空间中,我们利用内积同样可以引入直交概念,讨论直交投影和直交分解等基本问题.

定义 5.2 设 X 为内积空间,内积为$(,)$.

(1) 设 $x,y\in X$,如果$(x,y)=0$,则称 x 和 y **直交**,记作 $x\perp y$,

(2) 设 $M\subset X$,如果对一切 $y\in M$,有$(x,y)=0$,则称 x 与 M **直交**,记作 $x\perp M$,

(3) 设 $M,N\subset X$,如果对一切 $x\in M,y\in N$,有 $x\perp y$,则称 M 与 N **直交**,记作 $M\perp N$,

(4) 设 $M\subset X$,集合 $M^{\perp}=\{x\in X:x\perp M\}$称作 M 的**直交补**.

由定义 5.2 可得到下列简单性质:

1° 设 $x\in X$,$x=x_1+x_2$,其中 $x_1\perp x_2$,则 $\|x\|^2=\|x_1\|^2+\|x_2\|^2$,

2° 设 $L\subset X$,$\overline{L}=X$,如果 $x\perp L$,则 $x=0$,

3° 设 $M\subset X$,则 $M^{\perp}$是 X 的闭子空间.

我们只证明 2°,3°.

性质 2°的证明:设 $x\perp L$,因为 $\overline{L}=X$,故存在点到$\{x_n\}\subset L$,使 $x_n\rightarrow x$,由内积的连续性得

$$(x,x)=\lim_{n\to\infty}(x_n,x)=0.$$

性质 3°的证明：设 $x,y\in M^{\perp}$，$\alpha,\beta\in K$，则对任何 $z\in M$，

$$(\alpha x+\beta y,z)=\alpha(x,z)+\beta(y,z)=0,$$

故 $\alpha x+\beta y\in M^{\perp}$. 若 $x\in\overline{M^{\perp}}$，则存在点列 $\{x_n\}\subset M^{\perp}$，使 $x_n\to x$，故对任何 $z\in M$，有

$$(x,z)=\lim_{n\to\infty}(x_n,z)=0,$$

因此 $x\in M^{\perp}$，即 $M^{\perp}$是闭子空间.

下面介绍完备内积空间的一个重要性质——直交分解.

定义 5.3 设 M 是内积空间 X 的线性子空间，$x\in X$，如果有 $x_0\in M$，$x_1\in M^{\perp}$，使 $x=x_0+x_1$，则称 x_0 为 x 在 M 上的**直交投影**，简称为**投影**，式子 $x=x_0+x_1$ 称作 x 关于 M 的**直交分解**.

一般说来. 对于内积空间中任意向量 x 和任意线性子空间 M，x 在 M 上的投影并不一定存在，但如果存在投影的话，投影必是唯一的. 事实上，如果 x_0,y_0 均是 x 在 M 上的投影，则 $x_0,y_0\in M$，$x-x_0\in M^{\perp}$，$x-y_0\in M^{\perp}$，又因为 M 与 $M^{\perp}$均为 X 的线性子空间，故 $x_0-y_0\in M$ 以及 $x_0-y_0=(x-y_0)-(x-x_0)\in M^{\perp}$，所以

$$x_0-y_0\in M\cap M^{\perp},$$

则 $x_0-y_0=0$，即 $x_0=y_0$.

定理 5.2 设 M 为完备内积空间 X 的非空凸闭集，则对每一个 $x\in X$，存在唯一的 $x_0\in M$，使得

$$\|x-x_0\|=\rho(x,M)=\inf_{y\in M}\|x-y\|.$$

证 由下确界的定义，必有 M 中的点列$\{x_n\}$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\|x-x_n\|=\inf_{y\in M}\|x-y\|=d.$$

我们证明$\{x_n\}$是收敛点列，其极限 x_0 就是所要寻找的元素. 因为 M 是凸集，则 $\frac{1}{2}(x_n+x_m)\in M$，$\|\frac{1}{2}(x_n+x_m)-x\|\geqslant d$，由中线公式(5.8)

$$\|x_n-x_m\|^2=\|(x_n-x)+(x-x_m)\|^2$$

$$
\begin{aligned}
&= 2(\| x_n - x \|^2 + \| x - x_m \|^2) \\
&\quad - 4 \left\| x - \frac{x_n + x_m}{2} \right\|^2 \\
&\leqslant 2 \| x_n - x \|^2 + 2 \| x - x_m \|^2 - 4d^2.
\end{aligned}
$$

因为当 $n,m\to\infty$ 时，$\| x_n - x \| \to d$，$\| x_m - x \| \to d$，故

$$\| x_n - x_m \| \to 0 \qquad (n,m\to\infty),$$

即 $\{x_n\}$ 是完备空间 X 的基本列，M 闭，故存在 $x_0\in M$，使 $x_n\to x_0$，于是

$$\| x - x_0 \| = \lim_{n\to\infty} \| x - x_n \| = \inf_{y\in M} \| x - y \|.$$

如果还存在 $y_0\in M$，使

$$\| x - y_0 \| = \inf_{y\in M} \| x - y \|,$$

取点列

$$x_0, y_0, x_1, y_0, x_2, y_0, \cdots,$$

作为上面的点列 $\{x_n\}$，这个点列也是基本列，从而必有 $x_0 = y_0$，即 M 中使 $\| x - x_0 \| = \inf\limits_{y\in M} \| x - y \|$ 的元素 x_0 是唯一的．

定理 5.3 设 M 是完备内积空间 X 的闭子空间，则对任一 $x\in X$，x 在 M 上的投影必存在唯一，即存在唯一的 $x_0\in M$，$x_1\in M^{\perp}$，使

$$x = x_0 + x_1.$$

证 由于 M 是完备内积空间 X 的闭子空间，则 M 必是 X 的闭凸集，按定理 5.2，存在 $x_0\in M$，使得

$$\| x - x_0 \| = \inf_{y\in M} \| x - y \|.$$

令 $x_1 = x - x_0$，我们证明 $x_1\in M^{\perp}$．任取 $z\in M$，$z\neq 0$，对任何数 λ，$x_0 + \lambda z\in M$，所以

$$
\begin{aligned}
d^2 &\leqslant \| x - x_0 - \lambda z \|^2 = (x - x_0 - \lambda z, x - x_0 - \lambda z) \\
&= \| x - x_0 \|^2 + |\lambda|^2 \cdot \| z \|^2 \\
&\quad - \lambda(z, x - x_0) - \bar{\lambda}(x - x_0, z),
\end{aligned}
$$

故

$$\bar{\lambda}(x-x_0,z)+\lambda(z,x-x_0)-|\lambda|^2\cdot\|z\|^2\leqslant 0.$$

取 $\lambda=\dfrac{(x-x_0,z)}{\|z\|^2}$，代入上式得

$$\frac{|(x-x_0,z)|^2}{\|z\|^2}+\frac{|(x-x_0,z)|^2}{\|z\|^2}-\frac{|(x-x_0,z)|^2}{\|z\|^2}\leqslant 0,$$

所以对一切 $z\in M$，有

$$(x-x_0,z)=0,$$

即 $x_1=x-x_0\in M^{\perp}$.

最后证明直交分解的唯一性．设另有分解 $x=x'_0+x'_1$，其中 $x'_0\in M, x'_1\in M^{\perp}$，则由 $x_0+x_1=x'_0+x'_1$ 可得

$$x_0-x'_0=x'_1-x_1.$$

由上式可知 $x'_1-x_1\in M^{\perp}\cap M$，故 $x'_1=x_1, x_0=x'_0$.

设 X 是内积空间，M_1,M_2 是 X 的两个线性子空间，如果 $M_1\perp M_2$，则称 $M=\{x_1+x_2:x_1\in M_1,x_2\in M_2\}$ 为 M_1 与 M_2 的**直交和**，记为 $M_1\oplus M_2$，根据定理 5.3，如果 M 是完备内积空间 X 的闭子空间，则

$$X=M\oplus M^{\perp}.$$

推论 设 M 是完备内积空间 X 的线性子空间，若 $\overline{M}\neq X$，则存在 $y\neq 0$，使 $y\perp M$，从而 $\overline{M}=X$ 的充要条件是 $M^{\perp}=\{0\}$.

注 定理 5.3 的证明中只用到 M 的完备性，故条件 X 完备可改为 M 完备．

定理 5.4 设 M 为内积空间 X 的线性子空间，$x\in X, x_0\in M$，则

$$\|x-x_0\|=\inf_{y\in M}\|x-y\|$$

的充要条件是 x_0 为 x 在 M 上的投影．

证 充分性：设 x_0 为 x 在 M 上的投影，则 $x-x_0\perp M$，对任何 $y\in M$，由于 $x-y=(x-x_0)+(x_0-y)$，而 $x_0-y\in M$，因此 $x-x_0\perp x_0-y$，从而

$$\|x-y\|^2=\|x-x_0\|^2+\|x_0-y\|^2\geqslant\|x-x_0\|^2,$$

所以

$$\| x - x_0 \| = \inf_{y\in M} \| x - y \| .$$

必要性：设 $\| x - x_0 \| = \inf\limits_{y\in M} \| x - y \|$，其中 $x_0 \in M$，则据定理 5.3 证明知 x_0 为 x 在 M 上的投影．

特别地，当 M 为内积空间 X 的 n 维子空间时，$x \in X - M$，求 x 在 M 中的最佳逼近元 x_0 可化为如下形式的问题：

设 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 为 M 的一组基底，求 n 个数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，使得

$$\| x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \| = \inf_{\lambda_i} \| x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \| .$$

记 $x_0 = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$，因为最佳逼近元 x_0 一定是 x 到 M 上的投影，即有

$$(x - x_0, y) = 0, \forall\, y \in M,$$

这显然等价于

$$(x - x_0, e_j) = 0,\ j = 1, 2, \cdots, n, \tag{5.9}$$

我们的问题可化为求 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，使

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (e_i, e_j) = (x, e_j), j = 1, 2, \cdots, n, \tag{5.10}$$

由于投影 x_0 是唯一的，故以 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为未知量的方程组 (5.10)的解是唯一的，从而系数行列式不等于零，(5.10)的解就是

$$\alpha_i = \frac{\begin{vmatrix} (e_1, e_1) & \cdots & (x, e_1) & \cdots & (e_n, e_1) \\ (e_1, e_2) & \cdots & (x, e_2) & \cdots & (e_n, e_2) \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ (e_1, e_n) & \cdots & (x, e_n) & \cdots & (e_n, e_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (e_1, e_1) & \cdots & (e_i, e_1) & \cdots & (e_n, e_1) \\ (e_1, e_2) & \cdots & (e_i, e_2) & \cdots & (e_n, e_2) \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ (e_1, e_n) & \cdots & (e_i, e_n) & \cdots & (e_n, e_n) \end{vmatrix}}\ i = 1, 2, \cdots, n.$$

在实际应用中，线性回归中常用的最小二乘法，$L^2[a,b]$中函

数用多项式来逼近，求最佳平方平均逼近问题等都可化为上述方程组(5.10)来求得.

例 7 设 M_1, M_2 是内积空间 X 的两个子空间，试证明 $M_1 \perp M_2$ 的充要条件是对任意的 $x_1 \in M_1$ 和 $x_2 \in M_2$ 有

$$\| x_1 + x_2 \|^2 = \| x_1 \|^2 + \| x_2 \|^2.$$

证 必要性显然.

充分性：任取 $x_1 \in M_1, x_2 \in M_2$，由 $(x_1+x_2, x_1+x_2) = (x_1, x_1) + (x_2, x_2)$ 可得

$$\mathrm{Re}(x_1, x_2) = 0,$$

再由

$$(ix_1 + x_2, ix_1 + x_2) = (ix_1, ix_1) + (x_2, x_2),$$

可得

$$\mathrm{Im}(x_1, x_2) = 0,$$

故 $(x_1, x_2) = 0$，即 $x_1 \perp x_2, M_1 \perp M_2$.

例 8 设 X 为内积空间，M 是 X 的子空间，若对每一个 $x \in \overline{M}$，在 M 上的投影 x_0 均存在，则 M 必为 X 的闭子空间.

证 设 $x \in \overline{M}$，由假定，$x = x_0 + x_1$，其中 $x_1 \in M^{\perp}$. 取 $x_n \in M$，使 $x_n \to x$，则 $x_n - x_0 \to x - x_0 = x_1$，所以

$$(x_1, x_1) = \lim_{n \to \infty}(x_1, x_n - x_0) = 0,$$

故 $x_1 = 0, x = x_0 \in M$，M 是 X 的闭子空间.

5.3 内积空间中的标准直交系

类似于欧几里得空间中的直角坐标系，在内积空间中可利用直交概念引进直交系的概念，本段的目的就是讨论内积空间中直交系的基本性质，讨论 Hilbert 空间中直交系的存在性以及关于直交系的(广义)傅立叶展开等问题.

定义 5.4 设 X 为内积空间，$\{e_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset X$，如果

$$(e_\alpha, e_{\alpha'}) = \begin{cases} 0, \alpha \neq \alpha' \\ 1, \alpha = \alpha', \end{cases} \tag{5.11}$$

则称$\{e_\alpha\}$为 X 中的**标准直交系**.

设$\{e_n\}$为 X 中的可列标准直交系,$x\in X$,称

$$c_n=(x,e_n),\ (n=1,2,\cdots)$$

为 x 关于 e_n 的**傅立叶系数**$(n=1,2,\cdots)$.

例 9 实 $L^2[0,2\pi]$ 中,$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\cdots,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\cdots\right\}$是标准直交系;而$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int}\right\}(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$是复 $L^2[0,2\pi]$中的标准直交系.

例 10 l^2 中,令

$$e_n=(\underbrace{0,0,\cdots,1}_{n\text{位}},0,\cdots)\qquad(n=1,2,\cdots),$$

则$\{e_n\}$是 l^2 中的一个标准直交系.

定理 5.5 设$\{e_n\}$是内积空间 X 中的一个标准直交系,$x\in X$,则

(1)

$$\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|(x,e_n)|^2\leqslant\|x\|^2,\tag{5.12}$$

称(5.12)为**贝塞尔(Bessel)不等式**.

(2) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 n 个数,则 $\|x-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k e_k\|$ 当且仅当 $\alpha_k=c_k$, $(k=1,2,\cdots,n)$时取最小值.

证 (1) 由于

$$\begin{aligned}0\leqslant\|x-\sum_{k=1}^{n}c_k e_k\|^2&=(x-\sum_{k=1}^{n}c_k e_k,x-\sum_{k=1}^{n}c_k e_k)\\&=\|x\|^2-\sum_{k=1}^{n}c_k(e_k,x)-\sum_{k=1}^{n}\bar{c}_k(x,e_k)+\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2\\&=\|x\|^2-\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2,\end{aligned}$$

所以,对任意的自然数 n 有

$$\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2 \leqslant \|x\|^2.$$

故

$$\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2 \leqslant \|x\|^2.$$

(2) 由于

$$(x-\sum_{k=1}^{n}c_ke_k, e_j) = (x, e_j) - c_j = 0,\ (j=1,2,\cdots,n),$$

故 $x-\sum_{k=1}^{n}c_ke_k$ 与 e_j,$(j=1,2,\cdots,n)$的任何线性组合直交,再利用"若 $x=x_1+x_2$,$x_1\perp x_2$,则必有 $\|x\|^2=\|x_1\|^2+\|x_2\|^2$ 这一结论",则可得

$$\begin{aligned}\|x-\sum_{k=1}^{n}\alpha_ke_k\|^2 &= \|x-\sum_{k=1}^{n}c_ke_k\|^2 + \|\sum_{k=1}^{n}(c_k-\alpha_k)e_k\|^2 \\ &= \|x-\sum_{k=1}^{n}c_ke_k\|^2 + \sum_{k=1}^{n}|c_k-\alpha_k|^2.\end{aligned}$$

故当且仅当 $\alpha_k=c_k$,$(k=1,2,\cdots)$时,$\|x-\sum_{k=1}^{n}\alpha_ke_k\|$ 取到最小值 $\|x-\sum_{k=1}^{n}c_ke_k\|$.

例 11 设$\{e_\alpha\}_{\alpha\in I}$是内积空间 X 的标准直交系,则对固定的 $x\in X$,(x,e_α)中至多可列个不等于零.

证 因为集合

$$\{(x,e_\alpha):(x,e_\alpha)\neq 0\} = \bigcup_{p=1}^{\infty}\{(x,e_\alpha):|(x,e_\alpha)|\geqslant \frac{1}{p}\}.$$

记

$$E_p = \{(x,e_\alpha):|(x,e_\alpha)|\geqslant \frac{1}{p}\},$$

我们只要证明每个 E_p 是有限集.设不然,取$\{e_n\}$,使

$$|(x,e_n)|\geqslant \frac{1}{p},\ (n=1,2,3,\cdots).$$

据定理 5.5(1)所证 Bessel 不等式,对一切 n 成立

$$\|x\|^2 \geqslant \sum_{k=1}^{n} |(x,e_k)|^2 \geqslant n \cdot \frac{1}{p^2},$$

这是不可能的,故每个 E_p 是有限集.

设$\{e_n\}$是内积空间 X 中的标准直交系,如果(5.12)式中的等号成立,即

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(x,e_k)|^2, \tag{5.13}$$

则称(5.13)为**巴塞伐尔**(parseval) **等式**.

定义 5.5 设$\{e_n\}$是内积空间 X 的标准直交系,若对每一个 $x \in X$,有

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(x,e_k)|^2,$$

则称$\{e_n\}$是**完备的标准直交系**.

定理 5.6 设$\{e_n\}$是内积空间 X 的标准直交系,则下列条件等价:

(1) $\{e_n\}$是 X 中的完备标准直交系,

(2) 对任一 $x \in X, x = \sum_{k=1}^{\infty}(x,e_k)e_k$,即$\lim_{n\to\infty}\|x - \sum_{k=1}^{n}c_k e_k\| = 0$,

(3) 对 X 的稠密子集 M 中任一元素 x,有 $x = \sum_{k=1}^{\infty}(x,e_k)e_k$,

(4) $\{e_k\}$张成的子空间 L 在 X 中稠密.

证 (1)⇔(2) 由定理 5.5(1)的证明,对任一$x \in X$,

$$\|x - \sum_{k=1}^{n}c_k e_k\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n}|(x,e_k)|^2,$$

所以,$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}|(x,e_k)|^2$ 等价于 $x = \sum_{k=1}^{\infty}(x,e_k)e_k$,即(1) 与 (2) 等价.

(2)⇒(3) 显然.

(3)⇒(4) 设 $\overline{M}=X$,对任一 $x \in M$,有

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}(x,e_k)e_k.$$

这表明 x 为 L 中点列 $x_n=\sum_{k=1}^{n}c_ke_k$ 的极限，$x\in\overline{L}$，即 $M\subset\overline{L}$，但 $\overline{M}=X$，所以 $\overline{L}=X$.

(4)⇒(1) 设 $\overline{L}=X$. 任取 $x\in X$，对任给的 $\varepsilon>0$，存在

$$x_n=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^{(n)}e_k\in L.$$

使

$$\|x_n-x\|<\varepsilon.$$

据定理 5.5(2)

$$\|x-\sum_{k=1}^{n}c_ke_k\|\leqslant\|x-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^{(n)}e_k\|<\varepsilon,$$

所以

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}(x,e_k)e_k\qquad(\forall\ x\in X).$$

故 $\{e_n\}$ 完备.

我们称级数 $\sum_{k=1}^{\infty}(x,e_k)e_k$ 为 x 于 $\{e_n\}$ 的**傅立叶展开式**.

例 12 $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{int}\right\}(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 是复 $L^2[0,2\pi]$ 中的完备标准直交系，且对任何 $x(t)\in L^2[0,2\pi]$，有

$$\int_a^b x(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\int_a^b\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{int}\mathrm{d}t,$$

其中 c_n 为 x 关于 $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{int}\right\}$ 的傅立叶系数，$[a,b]\subset[0,2\pi]$.

事实上，设 L 为 $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{int}\right\}$ 张成的子空间，由数学分析中的维尔斯特拉斯逼近定理知 L 在 $L^2[0,2\pi]$ 中稠密. 因此，按定理 5.6 $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{int}\right\}$ 是 $L^2[0,2\pi]$ 中的完备标准直交系，任取 $x(t)\in L^2[0,$

$2\pi]$

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi} x(t)\mathrm{e}^{-int}\mathrm{d}t,$$

由完备系的特征知

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{int},$$

这里级数是按 $L^2[0,2\pi]$ 的范数收敛，对任何自然数 M,N，

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^b x(t)\mathrm{d}t - \sum_{n=-N}^{M} c_n\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{int}\mathrm{d}t\right| \\
\leqslant &\int_a^b \left|x(t) - \sum_{n=-N}^{M} c_n \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{int}\right|\mathrm{d}t \\
\leqslant &\int_0^{2\pi} \left|x(t) - \sum_{n=-N}^{M} c_n \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{int}\right|\mathrm{d}t \\
\leqslant &\sqrt{2\pi}\cdot\left\| x - \sum_{n=-N}^{M} c_n \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{int}\right\| \to 0\ (M,N\to\infty \text{ 时}),
\end{aligned}$$

故

$$\int_a^b x(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{int}\mathrm{d}t.$$

例 13 设 $\{e_n\}$ 是内积空间 X 的完备标准直交系，则对一切 x，$y\in X$ 有

$$(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)\overline{(y,e_n)}.$$

证 因为 $\{e_n\}$ 是完备的，记 $c_n=(x,e_n)$，由定理 5.6

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k \to x\ (n\to\infty).$$

所以

$$\begin{aligned}
(x,y) &= \lim_{n\to\infty}(x_n,y) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} c_k e_k, y\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} c_k(e_k,y) = \sum_{k=1}^{\infty}(x,e_k)\overline{(y,e_k)}.
\end{aligned}$$

定义 5.6 设$\{e_n\}$是内积空间标准直交系，如果 X 中不存在与所有 e_n 直交的非另向量，则称$\{e_n\}$是**完全的**.

定理 5.7 设 X 为 Hilbert 空间，$\{e_n\}$为 X 中的标准直交系，则$\{e_n\}$完备等价于$\{e_n\}$完全.

证 设$\{e_n\}$完备，$x\in X$，满足

$$(x,e_n)=c_n=0\ (n=1,2,3,\cdots),$$

则由 $\|x\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2=0$，知 $x=0$，故$\{e_n\}$是完全的.

反之，设$\{e_n\}$完全，按照定理 5.6 我们只需证明$\{e_n\}$张成的子空间 L 在 X 中稠密. 假设 $\overline{L}\neq X$，则存在 $x\in X-\overline{L}$，$x\neq 0$，由直交分解定理

$$x=x_0+x_1$$

其中 $x_0\in\overline{L}$，$x_1\perp\overline{L}$，显然 $x_1\neq 0$，且 $x_1\perp e_n(n=1,2,3,\cdots)$，这与$\{e_n\}$的完全性矛盾，故$\{e_n\}$是完备的.

由定理 5.6 我们看到，如果$\{e_n\}$是内积空间的一个完备标准直交系，则 X 中任一向量 x 均可展成关于$\{e_n\}$的傅立叶级数，即

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n.$$

这对研究内积空间中的各种问题带来了很大方便. 因此，完备标准直交系是研究 Hilbert 空间的重要工具，下面我们将介绍如何作出内积空间中的完备标准直交系.

引理 (Gram-Schmidt 直交化过程) 设 $V=\{x_n\}$是内积空间 X 中的一可列子集，则由 V 必可作出一个标准直交系$\{e_n\}$，使 V 张成的子空间与$\{e_n\}$张成的子空间相同.

证 不妨设$\{x_n\}$彼此线性无关，则 $x_n\neq 0\ (n=1,2,\cdots)$. 令

$$e_1=\frac{x_1}{\|x_1\|},$$

$$y_2=x_2-(x_2,e_1)e_1,$$

则 $\|e_1\|=1$，$y_2\neq 0$，且$(y_2,e_1)=(x_2,e_1)-(x_2,e_1)=0$，故 $y_2\perp e_1$.

再令

$$e_2 = \frac{y_2}{\| y_2 \|},$$

则 $\| e_2 \| = 1, (e_1, e_2) = 0$. 一般地,若已作出 $e_1, e_2, \cdots, e_{k-1}$,满足条件 $\| e_i \| = 1, e_i \perp e_j (i \neq j; i, j = 1, 2, 3, \cdots, k-1)$,则令

$$y_k = x_k - \sum_{i=1}^{k-1} (x_k, e_i) e_i, \tag{5.14}$$

易知 $y_k \neq 0, y_k \perp e_i (i = 1, 2, \cdots, k-1)$. 再令

$$e_k = \frac{y_k}{\| y_k \|}, \tag{5.15}$$

则 $e_1, e_2, \cdots, e_k$ 彼此直交,每个 $\| e_i \| = 1 (i = 1, 2, 3, \cdots, k)$. 如此一直下去,即可得到标准直交系 $\{e_n\}$,下面证明 $\{e_n\}$ 张成的子空间 L 与 $\{x_n\}$ 张成的子空间 L' 相同.

由上面的直交化过程,e_1 可用 x_1 表示,e_2 可用 x_1, x_2 表示,一般地据(5.14),(5.15)知 e_k 可用 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 线性表示,故

$$L \subset L'.$$

反之,x_1 也可用 e_1 表示,x_2 也可用 e_1, e_2 表示,一般地由(5.14)和(5.15)知 x_k 也可用 $e_1, e_2, \cdots, e_k$ 线性表示,故

$$L' \subset L.$$

因此

$$L' = L.$$

引理中作 $e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots$ 的过程称为 **Gram-Schmidt 直交化过程**.

定理 5.8 内积空间 X 可分的充要条件是 X 中存在完备的标准直交系.

证 必要性: 因为 X 可分,则存在可数稠密子集 $\{x_n\}$,由引理,用 $\{x_n\}$ 可建立标准直交系 $\{e_n\}$,且 $\{e_n\}$ 与 $\{x_n\}$ 张成的子空间相同,故 $\{e_n\}$ 张成的子空间 L 在 X 中稠密,按照定理 5.6,$\{e_n\}$ 是完备的标准直交系.

充分性：因为 X 中存在完备标准直交系 $\{e_n\}$，则 $\{e_n\}$ 张成的子空间 L 在 X 中稠密．不妨设 X 为实内积空间，则

$$L = \{x : x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k, \alpha_k \in R, k = 1,2,\cdots,n, n \in N\}.$$

记

$$L_0 = \{x : x = \sum_{k=1}^{n} r_k e_k, r_k \text{ 为有理数}, k = 1,2,\cdots,n, n \in N\},$$

则 L_0 是 X 中的可数稠密子集，故 X 可分．

设 $\{e_n\}$ 是内积空间 X 的标准直交系，由 Bessel 不等式，对每一个 $x \in X$，x 关于 $\{e_n\}$ 的傅立叶系数 $\{c_n\} \in l^2$. 现在考虑相反的问题：任给数列 $\{c_n\} \in l^2$，是否存在一个元素 $x \in X$，使得 $\{c_n\}$ 为 x 关于 $\{e_n\}$ 的傅立叶系数，且 parseval 等式成立？下面黎斯-菲歇(Riesz-Fisçher)定理回答了这一问题．

定理 5.9 （黎斯-菲歇） 设 H 是 Hilbert 空间，$\{e_n\}$ 为 H 的标准直交系，数列 $\{c_n\} \in l^2$，则必存在唯一的 $x \in H$，使 $c_n = (x, e_n)$，且

$$\| x \|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2.$$

证 令 $x_n = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k$，我们证明 $\{x_n\}$ 是 H 中的基本列．对任意的自然数 m, n（假定 $m > n$），

$$\| x_m - x_n \|^2 = \| \sum_{k=n+1}^{m} c_k e_k \|^2 = \sum_{k=n+1}^{m} |c_k|^2.$$

因为 $\{c_n\} \in l^2$，所以 $m, n \to \infty$ 时．$\| x_m - x_n \| \to 0$，$\{x_n\}$ 为 H 的基本列．H 完备，存在 $x \in H$，使 $x_n \to x$，由内积连续性

$$(x, e_k) = \lim_{n \to \infty} (x_n, e_k).$$

但当 $n > k$ 时，$(x_n, e_k) = c_k$，所以

$$(x, e_k) = c_k \qquad (k = 1,2,\cdots).$$

又因为 $\| x_n - x \| \to 0$ $(n \to \infty)$，据定理 5.6 知 parseval 等式成立．

设另有 $x'\in H$，使 $(x',e_n)=c_n$ 以及 $\|x'\|^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}|c_n|^2$，则

$$x'=\sum_{n=1}^{\infty}(x',e_n)e_n=\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n=x,$$

故满足定理要求的 x 是唯一的．

本段最后我们讨论可分 Hilbert 空间与 l^2 的同构性．

定理 5.10 每一个可分 Hilbert 空间 H 都与 l^2 空间等距同构，从而所有可分 Hilbert 空间彼此等距同构．

证 由定理 5.8，H 中必有完备标准直交系 $\{e_k\}$，$x\in H$，令

$$c_k=(x,e_k),$$

则

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}c_ke_k,\text{且 }\|x\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2.$$

作 $H\to l^2$ 的映射 T：

$$Tx=\{c_k\},x\in H.$$

则容易证明 T 是 $H\to l^2$ 上的一对一等距同构映射．事实上，T 是线性映射显然．因为

$$\|Tx\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2=\|x\|^2.$$

故 T 是 H 到 l^2 中的等距同构映射．又因为对任一 $\{c_k\}\in l^2$，由黎斯-菲歇定理，H 中必存在唯一元素 x，使 $c_k=(x,e_k)$ 以及 $x=\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_ke_k$，故存在 $x\in H$，使 $Tx=\{c_k\}$，因此 H 与 l^2 等距同构．

例 14 设 $\{e_k\}$ 是 Hilbert 空间 H 中的完备标准直交系，又设 $\{e'_k\}$ 是 H 中的标准直交系，满足

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|e_k-e'_k\|^2<1,$$

则 $\{e'_k\}$ 也是完备的标准直交系．

证 我们用 L 表示由 $\{e'_k\}$ 张成的子空间，只要证明 $\overline{L}=H$，即证明 $x\perp L$ 时，必有 $x=0$. 设不然，存在 $x\perp L$，$x\neq0$，则

$$\| x \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(x,e_k)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(x,e_k - e'_k)|^2$$

$$\leqslant \| x \|^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \| e_k - e'_k \|^2 < \| x \|^2,$$

矛盾,故$\{e'_k\}$完备.

实际上,本题的条件 $\sum_{k=1}^{\infty} \| e_k - e'_k \|^2 < 1$ 可放宽为

$$\sum_{k=1}^{\infty} \| e_k - e'_k \|^2 < \infty.$$

例 15 在 l^2 中,记 $\mathscr{F} = \{e_2, e_3, \cdots, e_n, \cdots\}$,其中 $e_n = \underbrace{(0,\cdots,0,1}_{n\text{位}},0,\cdots)$,令

$$f_1 = e_1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} e_k,$$

显然 $f_1 \in l^2$,再令

$X = \{\alpha_1 f_1 + \sum_{k=2}^{n} \alpha_k e_k : n$ 为任一自然数,$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为任意实数$\}$.

按照 l^2 的线性运算及内积,X 是一个内积空间,$\mathscr{F}$ 显然是 X 中的标准直交系,我们可以证明 $\mathscr{F}$ 是完全的,但不是完备的.

证 $x \in X, x \perp \mathscr{F}$,则存在 $\alpha_k (k=1,2,\cdots,n)$,使得

$$x = \alpha_1 f_1 + \sum_{k=2}^{n} \alpha_k e_k.$$

取 $m > n$,得

$$0 = (x, e_m) = \frac{\alpha_1}{m}, \qquad \alpha_1 = 0.$$

所以

$$x = \sum_{k=2}^{n} \alpha_k e_k.$$

再利用 $x \perp \mathscr{F}$,即得 $\alpha_k = 0 (k=2,3,\cdots,n)$,故 $x=0$,即 $\mathscr{F}$ 是 X 中的完全标准直交系. 但是

$$\| f_1 \|^2 = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2},$$

而

$$\sum_{k=2}^{n} |(f_1, e_k)|^2 = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

则

$$\| f_1 \|^2 \neq \sum_{k=2}^{\infty} |(f_1, e_k)|^2.$$

即对 X 中元素 f_1,parseval 等式不成立,故 $\mathscr{F}$ 在 X 中不是完备的.

第十二章　线性算子和线性泛函

本章主要介绍 Banach 空间上线性算子和线性泛函的基本定理，这些定理是泛函分析早期最光辉的成果，也是基础泛函分析的核心．

前面已经指出，泛函分析的研究对象是无限维空间以及这些空间之间映射的一般性质．关于前者，上一章已介绍了距离空间、赋范线性空间和内积空间．本章的对象是映射，主要是赋范线性空间上和内积空间上的映射，作为基础教程，我们的讨论仅限于满足线性条件的映射，即线性泛函和线性算子．

在这一章中，我们引入了线性泛函和线性算子等概念，证明了赋范线性空间上线性算子的连续性等价于有界性；在赋范线性空间中讨论了连续线性泛函的保范延拓，即汉恩-巴拿赫定理；并利用完备空间的第二纲性，证明了 Banach 逆算子定理、闭图象定理和共鸣定理；介绍了全连续算子及其初等性质以及 Hilbert 空间中的线性泛函和线性算子．

§1　有界线性算子

1.1　线性算子的有界性和连续性

我们称线性空间中的映射 T 为算子，例如微分算子 $D=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 就是连续可微函数空间 $\mathrm{C}^1[a,b]$ 到 $\mathrm{C}[a,b]$ 的映射；又如

$$Tx(t)=\int_a^t x(s)\mathrm{d}s,\ x(s)\in \mathrm{C}[a,b]$$

是 C$[a,b]$到 C$[a,b]$的算子；而黎曼积分

$$T(x(t)) = \int_a^b x(t)\mathrm{d}t,\ x(t) \in \mathrm{C}[a,b],$$

则可看作 C$[a,b]$到 R 的算子(泛函)．以上三个例子中的算子都能保持线性运算关系，称作线性算子与线性泛函．

定义 1.1 设 X 和 Y 均是赋范线性空间，K 为数域，D 是 X 的线性子空间，T 是 D 到 Y 中的映射．

(1) 如果对任何 $x,y\in D$ 和数 $\alpha,\beta\in K$ 成立

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty.$$

则称 T 为 D 到 Y 中的**线性算子**，称 D 为 T 的**定义域**，记为 $\mathscr{D}(T)$，而称集合

$$TD = \{Tx : x \in D\}$$

为 T 的**值域**，记为 $\mathscr{R}(T)$.

(2) 如果存在 $M>0$，使得对一切 $x\in\mathscr{D}(T)$，有

$$\| Tx \| \leqslant M \| x \| \tag{1.1}$$

则称 T 为**有界的**，否则就称 T 为**无界的**.

(3) 如果 $Y=K$，则称 D 到 Y 的线性算子为线性泛函，常用 f,g 来表示泛函．

按照定义 1.1，容易证明 T 有界的充要条件是 T 将 $\mathscr{D}(T)$的任一有界集映成 Y 中的有界集．

事实上，设 T 有界，$A\subset\mathscr{D}(T)$是有界集，则存在 $M_1>0$，使得对一切 $x\in A$，有 $\| x \| \leqslant M_1$，则 $\| Tx \| \leqslant M \cdot \| x \| \leqslant M \cdot M_1$ $(\forall\ x\in A)$，故 TA 是 Y 中的有界集．反之，令 $S=\{x\in\mathscr{D}(T): \| x \| =1\}$，则存在 $M>0$，使得对一切 $x\in S$，有 $\| Tx \| \leqslant M$，任取 $x\in \mathscr{D}(T)$，$x\neq 0$，$\dfrac{x}{\| x \|}\in S$，故

$$\left\| T \frac{x}{\| x \|} \right\| \leqslant M,$$

从而对一切 $x\in\mathscr{D}(T)$，成立

$$\| Tx \| \leqslant M \| x \| .$$

定理 1.1 设 X,Y 是两个赋范线性空间，T 是 $\mathscr{D}(T)\subset X$ 到 Y 中的线性算子，则下列条件等价：

(1) T 是有界线性算子，

(2) T 是连续线性算子，

(3) T 在 0 点是连续的．

证 (1)$\Rightarrow$(2) 设 T 有界，则存在 $M>0$，使得对一切 $x\in\mathscr{D}(T)$，有

$$\|Tx\| \leqslant M\|x\|.$$

任取 $x_n\in\mathscr{D}(T)$，$x\in\mathscr{D}(T)$，$x_n\to x(n\to\infty)$，则

$$\begin{aligned}\|Tx_n - Tx\| &= \|T(x_n - x)\| \\ &\leqslant M\cdot\|x_n - x\| \to 0\ (n\to\infty),\end{aligned}$$

故 T 连续．

(2)$\Rightarrow$(3)显然．

(3)$\Rightarrow$(1)设 T 在 $x=0$ 处连续，则存在 $\delta>0$，使得当 $x\in\mathscr{D}(T)$，$\|x\|<\delta$ 时，$\|Tx\|<1$，从而对一切 $y\in\mathscr{D}(T)$，$y\neq0$，我们有

$$\|Ty\| = \frac{2\|y\|}{\delta}\left\|T\left(\frac{\delta}{2\|y\|}y\right)\right\| < \frac{2}{\delta}\|y\|,$$

故 T 是有界线性算子．

注 一般地，对非线性算子 T，如果 T 将 $\mathscr{D}(T)$ 中的任一有界集映为有界集，则称非线性算子 T 为有界的，此时，有界性与连续性不一定等价．

例如一个有界函数不一定连续，反过来，定义在开区间上的连续函数也不一定有界．

定义 1.2 设 X,Y 是两个赋范线性空间，T 是 $\mathscr{D}(T)\subset X$ 到 Y 中的有界线性算子，则称

$$\|T\| = \inf\{M: \|Tx\| \leqslant M\|x\|, \forall\ x\in\mathscr{D}(T)\} \tag{1.2}$$

为 T 的**范数**．

由(1.2)式我们可得

$$\|T\| = \inf\{M: \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leqslant M, \forall\, x \in \mathscr{D}(T), x \neq 0\}$$

$$= \sup\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|}: x \in \mathscr{D}(T), x \neq 0\},$$

所以

$$\|Tx\| \leqslant \|T\| \cdot \|x\| \quad (\forall\, x \in \mathscr{D}(T)), \tag{1.3}$$

于是

$$\sup_{\substack{\|x\| \leqslant 1 \\ x \in \mathscr{D}(T)}} \|Tx\| \leqslant \|T\|.$$

从而立即可得

$$\|T\| = \sup_{\substack{\|x\| \neq 0 \\ x \in \mathscr{D}(T)}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{\|x\| = 1 \\ x \in \mathscr{D}(T)}} \|Tx\| = \sup_{\substack{\|x\| \leqslant 1 \\ x \in \mathscr{D}(T)}} \|Tx\|. \tag{1.4}$$

在 § 2 中我们将利用(1.4)来证明 $\|T\|$ 满足范数的三个条件．下面我们举几个例子来说明如何证明线性算子 T 有界以及如何求出有界线性算子 T 的范数 $\|T\|$.

例 1 设线性算子 $T: L[a,b] \to C[a,b]$ 定义为

$$(Tf)(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t, \quad f(t) \in L[a,b], \tag{1.5}$$

试证明 T 为有界线性算子，且 $\|T\| = 1$.

证 事实上，T 是线性算子显然．任取 $f \in L[a,b]$，使 $\|f\| = \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t = 1$. 由于

$$\|Tf\| = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |Tf(x)| = \max_{a \leqslant x \leqslant b} \left|\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant \max_{a \leqslant x \leqslant b} \int_a^x |f(t)|\mathrm{d}t = \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t = 1,$$

则 $\|T\| \leqslant 1$. 另一方面，取 $f_0(t) = \frac{1}{b-a}$，显然 $f_0 \in L[a,b]$，且 $\|f_0\| = 1$.

$$\|T\| = \sup_{\|f\| = 1} \|Tf\| \geqslant \|Tf_0\| = \max_{a \leqslant x \leqslant b} \int_a^x \frac{1}{b-a}\mathrm{d}t$$

$$= \int_a^b \frac{1}{b-a} \mathrm{d}t = 1.$$

故 $\|T\| = 1$.

例 2 试证明：如果将(1.5)式定义的映射 T 看作 $\mathrm{L}[a,b] \to \mathrm{L}[a,b]$ 的线性算子时，则

$$\|T\| = b - a.$$

证 首先，对任一 $f \in \mathrm{L}[a,b]$,

$$\|Tf\| = \int_a^b \left| \int_a^x f(t) \mathrm{d}t \right| \mathrm{d}x$$

$$\leqslant \int_a^b \left(\int_a^b |f(t)| \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x \leqslant \|f\| (b-a).$$

所以

$$\|T\| \leqslant b - a.$$

另一方面，对任何使得 $a + \frac{1}{n} < b$ 的自然数 n，令

$$f_n(x) = \begin{cases} n, \text{当 } x \in [a, a + \frac{1}{n}] \text{ 时}, \\ 0, \text{当 } x \in (a + \frac{1}{n}, b] \text{ 时}. \end{cases}$$

显然 $\|f_n\| = 1$，而且

$$\|Tf_n\| = \int_a^b \left| \int_a^x f_n(t) \mathrm{d}t \right| \mathrm{d}x$$

$$= \int_a^{a+\frac{1}{n}} \left| \int_a^x f_n(t) \mathrm{d}t \right| \mathrm{d}x + \int_{a+\frac{1}{n}}^b \left| \int_a^x f_n(t) \mathrm{d}t \right| \mathrm{d}x$$

$$= \int_a^{a+\frac{1}{n}} n(x-a) \mathrm{d}x + \int_{a+\frac{1}{n}}^b \left| \int_a^{a+\frac{1}{n}} f_n(t) \mathrm{d}t \right.$$

$$\left. + \int_{a+\frac{1}{n}}^x f_n(t) \mathrm{d}t \right| \mathrm{d}x$$

$$= b - a - \frac{1}{2n}.$$

所以

$$\| T \| \geqslant \sup_n \| Tf_n \| = b - a,$$

从而 $\| T \| = b-a$.

例 1 和例 2 中的算子虽然形式上完全一致，但由于视为不同空间的映射，它们的范数是不同的．

例 3 设 $K(t,s)$ 是 $a \leqslant t \leqslant b, a \leqslant s \leqslant b$ 上的连续函数，在 $\mathrm{C}[a,b]$ 中定义积分算子 T 如下：

$$Tx(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)\mathrm{d}s, \quad x(s) \in \mathrm{C}[a,b],$$

则 T 是 $\mathrm{C}[a,b] \to \mathrm{C}[a,b]$ 的有界线性算子，且

$$\| T \| = \max_{t \in [a,b]} \int_a^b |K(t,s)| \mathrm{d}s.$$

证 首先 T 显然是 $\mathrm{C}[a,b] \to \mathrm{C}[a,b]$ 中的线性算子．令

$$\alpha = \max_{t \in [a,b]} \int_a^b |K(t,s)| \mathrm{d}s.$$

因为对任一 $x(t) \in \mathrm{C}[a,b]$.

$$\| Tx \| = \max_{t \in [a,b]} \left| \int_a^b K(t,s)x(s)\mathrm{d}s \right| \leqslant \alpha \| x \|,$$

所以 $\| T \| \leqslant \alpha$. 另一方面，由于 $\int_a^b |K(t,s)|\mathrm{d}s$ 是 t 的连续函数，则存在 $t_0 \in [a,b]$，使

$$\alpha = \int_a^b |K(t_0,s)| \mathrm{d}s.$$

令 $z_0(s) = \mathrm{sgn}K(t_0,s)$，则 $z_0(s)$ 必可测，且 $|z_0(s)| \leqslant 1$ $(\forall\ s \in [a,b])$，由第九章 §3 鲁金定理的推论 3.3，存在 $x_n(s) \in \mathrm{C}[a,b]$，$|x_n(s)| \leqslant 1$，$(\forall\ s \in [a,b])$，$x_n(s)$ 几乎处处收敛于 $z_0(s)$. 因为

$$|K(t_0,s)x_n(s)| \leqslant |K(t_0,s)|,$$

故按照勒贝格控制收敛定理，有

$$\int_a^b K(t_0,s)x_n(s)\mathrm{d}s \to \int_a^b K(t_0,s)z_0(s)\mathrm{d}s \quad (n \to \infty).$$

因此，对一切自然数 n，

$$\| T \| \geqslant \| Tx_n \| \geqslant |Tx_n(t_0)| = \left| \int_a^b K(t_0,s)x_n(s)\mathrm{d}s \right|,$$

而上式右端

$$\left|\int_a^b K(t_0,s)x_n(s)\mathrm{d}s\right| \to \left|\int_a^b |K(t_0,s)|\mathrm{d}s\right| = \alpha.$$

故

$$\| T \| \geqslant \alpha,$$

这样,我们就证明了 $\| T \| = \alpha$.

例 4 设 X 为 n 维赋范线性空间,求出 X 中线性算子 T 的一般形式.

解 设$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$为 X 的一组基底,因为 $Te_j\in X$,所以

$$Te_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij}e_i \quad (j = 1,2,\cdots,n).$$

任取 $x\in X, x=\sum_{j=1}^n \xi_j e_j$,则

$$Tx = \sum_{j=1}^n \xi_j Te_j = \sum_{j=1}^n \xi_j\left(\sum_{i=1}^n \alpha_{ij}e_i\right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \alpha_{ij}\xi_j\right)e_i. \quad (1.6)$$

记 $y=Tx=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$,由(1.6)可知

$$\eta_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}\xi_j \quad (i = 1,2,\cdots,n), \quad (1.7)$$

显然(1.7)等价于

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

令 $A=(\alpha_{ij})$为 $n\times n$ 矩阵,则 T 对应于矩阵 A. 反之,给定一个 $n\times n$ 矩阵 $A=(\alpha_{ij})$,由(1.7)(或(1.8))定义的算子 T 是 $X\to X$ 中的线性算子.

利用有穷维空间 X 中的收敛等价于按坐标收敛,读者容易证明 n 维赋范线性空间中的线性算子 T 必连续.

类似地,我们可以求出 n 维赋范线性空间 X 上的线性泛函 f

的一般形式．事实上，只要令 $f(e_i)=\alpha_i$，则对任一 $x=\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i\in X$，$f(x)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\alpha_i$，令 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，则 f 对应于 n 维向量 α．同样，n 维赋范线性空间 X 上的线性泛函 f 必是连续的．

例 5 在 $C[0,1]$ 中考察微分算子 $T=\frac{d}{dt}$，$\mathscr{D}(T)=C^1[0,1]$，则 T 为 $\mathscr{D}(T)=C^1[0,1]\to C[0,1]$ 中的无界线性算子．

事实上，取 $x_n(t)=\sin nt$，则 $n\geqslant 2$ 时，$\|x_n\|=1$，但

$$\|Tx_n\|=\|n\cos nt\|=n\to\infty,$$

故 T 无界．

对于赋范线性空间 X 上的线性泛函 f，我们可把 f 视为 X 到数域 K（实数域或复数域）上的线性算子．由于

$$\|f(x)\|=|f(x)|,$$

因而有界线性泛函 f 的范数就是

$$\|f\|=\sup_{\|x\|=1}|f(x)|.$$

1.2 线性算子空间

设 X,Y 是两个赋范线性空间，我们用 $\mathscr{B}(X,Y)$ 表示由 $X\to Y$ 的所有有界线性算子组成的集合．一个 X 到 Y 的有界线性算子 T 可看作 $\mathscr{B}(X,Y)$ 的一个元素，在 $\mathscr{B}(X,Y)$ 中定义线性运算，并以 $\|T\|$ 作为其中元素的范数，我们将证明 $\mathscr{B}(X,Y)$ 是一个赋范线性空间．

定理 1.2 设 X,Y 是赋范线性空间，数域为 K，在 $\mathscr{B}(X,Y)$ 中定义加法和数乘法如下：

$$(T_1+T_2)x=T_1x+T_2x\ (T_1,T_2\in\mathscr{B}(X,Y),x\in X),$$

$$(\alpha T)x=\alpha(Tx)\ (T\in\mathscr{B}(X,Y),\alpha\in K),$$

并用 $\|T\|=\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|$ 作为 T 的范数，则

(1) $\mathscr{B}(X,Y)$ 是一个赋范线性空间，

(2) 如果 Y 完备，则 $\mathscr{B}(X,Y)$是一个 Banach 空间.

证 (1) 显然 $\mathscr{B}(X,Y)$是一个线性空间，故仅需证明 $\|T\|$ 满足范数的三个条件：

$\|T\|\geqslant 0$ 显然，$T=0$(零算子)，则 $\|T\|=0$，反之，若 $\|T\|=0$，则对一切 $x\in X,x\neq 0$，有 $\dfrac{\|Tx\|}{\|x\|}=0$，从而对一切 $x\in X$，有 $Tx=0$，即 $T=0$；

$$\begin{aligned}\|\alpha T\| &= \sup_{\|x\|=1}\|\alpha Tx\| \\ &= |\alpha|\sup_{\|x\|=1}\|Tx\| = |\alpha|\cdot\|T\|;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|T_1+T_2\| &= \sup_{\|x\|=1}\|(T_1+T_2)x\| \\ &\leqslant \sup_{\|x\|=1}\|T_1x\| + \sup_{\|x\|=1}\|T_2x\| \\ &= \|T_1\| + \|T_2\|.\end{aligned}$$

(2) 设 Y 完备，$\{T_n\}$是 $\mathscr{B}(X,Y)$中的基本列，则对任给的 $\varepsilon>0$，存在自然数 N，使得 $n,m>N$ 时，

$$\|T_n - T_m\| < \varepsilon. \tag{1.9}$$

因此，对一切 $x\in X$，当 $n,m>N$ 时，

$$\|T_nx - T_mx\| < \varepsilon\|x\|, \tag{1.10}$$

所以，对每一个 $x\in X$，$\{T_nx\}$是完备空间 Y 中的基本列，从而必存在 $y\in Y$，使

$$y = \lim_{n\to\infty}T_nx.$$

我们作算子 $T:X\to Y$：

$$Tx = y = \lim_{n\to\infty}T_nx\ (x\in X).$$

易知 T 是 $X\to Y$ 中的线性算子，下面我们证明 T 是有界的，而且

$$\lim_{n\to\infty}\|T_n - T\| = 0.$$

在(1.10)中令 $m\to\infty$，则得

$$\|T_nx - Tx\| \leqslant \varepsilon\|x\|\ (n>N,x\in X),$$

所以，当 $n>N$ 时，

$$\| T_n - T \| \leqslant \varepsilon,$$

即 $T_n - T \in \mathscr{B}(X,Y)$，从而 $T \in \mathscr{B}(X,Y)$，且

$$\lim_{n\to\infty} \| T_n - T \| = 0.$$

故 $\mathscr{B}(X,Y)$ 是一个 Banach 空间．

我们称 $\mathscr{B}(X,Y)$ 为有界线性算子空间，当 $Y=X$ 时，简记为 $\mathscr{B}(X)$．

注 读者容易证明 $\{T_n\}$ 依算子范数收敛于 T（即 $\| T_n - T \| \to 0(n\to\infty)$）的充要条件是 $\{T_n\}$ 在 X 的任一有界集上一致收敛于 T，故 $\{T_n\}$ 依算子范数收敛于 T 也称作 $\{T_n\}$ **一致收敛**于 T．

设 $T, T_n \in \mathscr{B}(X,Y)(n=1,2,3,\cdots)$，如果对任一 $x \in X$，有

$$\lim_{n\to\infty} \| T_n x - Tx \| = 0,$$

则称 $\{T_n\}$ **强收敛**于 T．

显然 $\{T_n\}$ 一致收敛于 T 必有 $\{T_n\}$ 强收敛于 T，反之，则不然．

例 6 在 l^p 中定义算子 T_n 如下：

$$T_n x = x_n \quad (n = 1,2,3,\cdots),$$

其中 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots) \in l^p$，$x_n=(\xi_n,\xi_{n+1},\cdots)$．不难看出，$T_n$ 是 l^p 到 l^p 的有界线性算子，且 $\| T_n \| \leqslant 1$．注意到对每个 $x \in l^p$，$\| x_n \| \to 0(n\to\infty)$，故

$$\lim_{n\to\infty} T_n x = 0,$$

$\{T_n\}$ 强收敛于零算子，但 $\{T_n\}$ 并不依算子范数收敛于零算子．这是因为对每个 n，若取

$$e_n = \underbrace{(0,\cdots,0,1}_{n\text{ 位}},0,\cdots),$$

则 $\| e_n \| = 1$，且 $T_n e_n = (1,0,\cdots)$，故

$$\| T_n \| \geqslant \| T_n e_n \| = 1.$$

于是 $\| T_n \| = 1$，即 $\{T_n\}$ 不依算子范数收敛于零算子．

例 7 设 $f(t) \in C[0,1]$，$P_n(t)$ 是 $f(t)$ 的伯恩斯坦多项式，即

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}. \tag{1.11}$$

令 $L_n f = P_n$，由(1.11)式易知 L_n 为 C[0,1]到 C[0,1]的有界线性算子，且 $\| L_n \| \leqslant 1$. 按照文献[6]第五章§2 中的伯恩斯坦定理，$P_n(t)$在[0,1]上一致收敛于 $f(t)$，即对任何 $f \in C[0,1]$，

$$\| L_n f - If \| \to 0 \ (n \to \infty).$$

这里 I 表示 C[0,1]中的恒同算子，从而$\{L_n\}$强收敛于 I，但可以证明$\{L_n\}$不一致收敛于 I.

事实上，取定一个 $k_0(0<k_0<n)$，作连续函数(如图 12.1 所示)

$$f_n(t) = \begin{cases} 1, & t \in \left[0, \dfrac{k_0}{n}\right] \cup \left[\dfrac{k_0+1}{n}, 1\right], \\ 0, & t = \dfrac{2k_0+1}{2n}, \\ \text{线性函数}, & t \in \left[\dfrac{k_0}{n}, \dfrac{2k_0+1}{2n}\right] \cup \left[\dfrac{2k_0+1}{2n}, \dfrac{k_0+1}{n}\right], \end{cases}$$

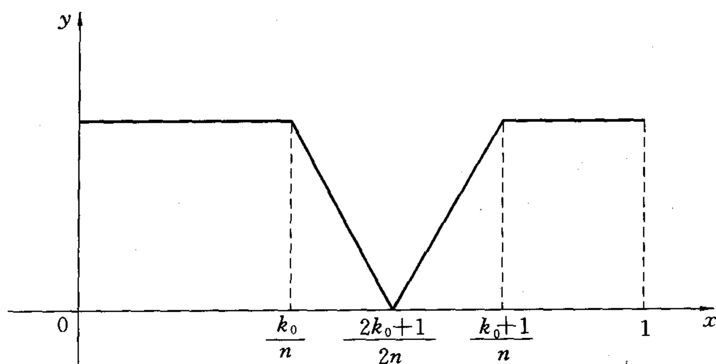


图 12.1

则 $\| f_n \| = 1$，令 $t_0 = \dfrac{2k_0+1}{2n}$，$f_n(t_0) = 0$，

$$\| L_n f_n - If_n \| = \max_{t \in [0,1]} |P_n(t) - f_n(t)|$$

$$\geqslant |P_n(t_0) - f_n(t_0)|$$

$$= \left| \sum_{k=0}^{n} f_n\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} t_0^k (1-t_0)^{n-k} \right|$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t_0^k (1-t_0)^{n-k} = 1.$$

所以对任何 n，有

$$\| L_n - I \| \geqslant \| L_n f_n - f_n \| \geqslant 1,$$

即 $\{L_n\}$ 不一致收敛于 I.

§2 Hahn-Banach 延拓定理

设 X 为赋范线性空间，相应的数域为 K，$X \to K$ 的有界线性算子称作 X 上的有界线性泛函，由于 K 本身是完备赋范线性空间，故 X 上全部有界线性泛函组成的集合，$\mathscr{B}(X,K)$ 必是 Banach 空间，称它为 X 的**共轭空间**，记为 X^*.

对任意的赋范线性空间 X，是否一定存在非零的有界线性泛函，也就是说 X^* 中是否一定存在非零元素，本节的目的就是解决这一问题．由 §1 例 4 的说明可知，有限维赋范线性空间 X 上的有界线性泛函必存在．因此，本节我们先讨论赋范线性空间的子空间上的有界线性泛函的保范延拓，然后利用保范延拓定理来证明任一赋范线性空间 $X \neq \{0\}$ 上必存在"足够多"的有界线性泛函，并求出一些常用的函数空间、数列空间的共轭空间．

2.1 Hahn-Banach 定理

设 X 为线性空间，p 为定义在 X 上的实泛函，如果对一切 x，$y \in X$，有

$$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y),$$

则称 p 是**次可加的**；如果对任意的实数 $\alpha \geqslant 0$ 以及任意的 $x \in X$，有

$$p(\alpha x) = \alpha p(x).$$

则称 $p(x)$ 为**正齐性的**.

显然,范数 $\|x\|$ 是次可加、正齐性实泛函.

引理 设 G 为实线性空间 X 的线性子空间,f 是 G 上的实线性泛函(即满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)$,$f(\alpha x)=\alpha f(x)$,这里 $x,y\in G$,α 为实数),p 为定义在 X 上的次可加、正齐性实泛函,如果

$$f(x)\leqslant p(x)\ (x\in G),$$

则必存在定义在 X 上的实线性泛函 $F(x)$,满足

(1) $x\in G$ 时,$F(x)=f(x)$,

(2) $x\in X$ 时,$F(x)\leqslant p(x)$.

证 不妨设 $G\neq X$,任取 $x_0\in X-G$,记

$$G_1=\{\alpha x_0+x : x\in G,\alpha\in(-\infty,+\infty)\},$$

则 G_1 是 X 的一个子空间,且 G_1 中的任一元素 y 可唯一地表成 $y=\alpha x_0+x$,其中 $x\in G.\ \alpha\in(-\infty,+\infty)$.

(1) 我们首先证明 $f(x)$ 可延拓到 G_1 上,使它满足引理中条件(1),(2). $y\in G_1$,$y=\alpha x_0+x$,其中 $x\in G$,$\alpha\in(-\infty,+\infty)$,如果 f_1 是 f 在 G_1 上的延拓,则

$$f_1(y)=f_1(x)+\alpha f_1(x_0)=f(x)+\alpha f_1(x_0). \qquad (2.1)$$

取 $f_1(x_0)=c$,使 $f_1(y)\leqslant p(y)$ ($\forall\ y\in G_1$),即找常数 c,使不等式

$$\alpha c+f(x)\leqslant p(\alpha x_0+x), \qquad (2.2)$$

对一切 $x\in G$ 和 $\alpha\in(-\infty,+\infty)$ 成立.

$\alpha=0$ 时,(2.2)显然成立,$\alpha>0$ 时,(2.2)等价于

$$c+f(\frac{x}{\alpha})\leqslant\frac{1}{\alpha}p(\alpha x_0+x).$$

即

$$c\leqslant p(x_0+\frac{x}{\alpha})-f\left(\frac{x}{\alpha}\right). \qquad (2.3)$$

$\alpha<0$ 时,(2.2)等价于

$$c\geqslant -p(-x_0-\frac{x}{\alpha})-f\left(\frac{x}{\alpha}\right), \qquad (2.4)$$

由(2.3),(2.4)可知,c 必须满足下列两个不等式:

$$c \leqslant p(x''+x_0) - f(x''), \quad x'' \in G$$

$$c \geqslant -p(-x'-x_0) - f(x'), \quad x' \in G.$$

要使满足上述两个不等式的 c 存在当且仅当

$$-p(-x'-x_0) - f(x') \leqslant p(x''+x_0) - f(x''), \quad (2.5)$$

对一切 $x', x'' \in G$ 成立. 由于 p 是次可加泛函,且 $x \in G$ 时,$f(x) \leqslant p(x)$,则对任何 $x', x'' \in G$,有

$$f(x'') - f(x') = f(x''-x') \leqslant p(x''-x')$$

$$\leqslant p(x''+x_0) + p(-x'-x_0).$$

故

$$-p(-x'-x_0) - f(x') \leqslant p(x''+x_0) - f(x'').$$

因为在(2.5)式中 x', x'' 是 G 中任意两个元素,故

$$c' = \sup_{x' \in G}\{-p(-x'-x_0) - f(x')\}$$

$$\leqslant c'' = \inf_{x'' \in G}\{p(x''+x_0) - f(x'')\}.$$

于是只要取 c 满足 $c' \leqslant c \leqslant c''$,在 G_1 上定义线性泛函 f_1:

$$f_1(\alpha x_0 + x) = \alpha c + f(x),$$

则 f_1 是 f 在 G_1 上的延拓,且满足 $f_1(y) \leqslant p(y)$ $(\forall\ y \in G_1)$.

(2) 设线性泛函 F 满足 $\mathscr{D}(F) \supset G$,对 $x \in G$,有 $f(x) = F(x)$,则称 $F(x)$ 是 f 的一个延拓. 我们用 $\mathscr{F}$ 表示 f 的一切满足

$$F(x) \leqslant p(x) \ (x \in \mathscr{D}(F))$$

的延拓 F 全体组成的集合,在 $\mathscr{F}$ 中规定半序如下:对 $F_1, F_2 \in \mathscr{F}$,如果 $\mathscr{D}(F_1) \subset \mathscr{D}(F_2)$,且 $x \in \mathscr{D}(F_1)$ 时,$F_1(x) = F_2(x)$,则称 $F_1 \prec F_2$,于是 $\mathscr{F}$ 是一个非空半序集.

现设 M 是 $\mathscr{F}$ 的任一非空全序子集,令

$$\mathscr{D} = \bigcup_{F \in M} \mathscr{D}(F),$$

在 $\mathscr{D}$ 上定义泛函 φ:任取 $x \in \mathscr{D}$,必存在 $\mathscr{D}(F)$,使 $x \in \mathscr{D}(F)$,则令

$$\varphi(x) = F(x).$$

由于 M 是全序的，易知 $\varphi(x)$ 是 $\mathscr{D}$ 上唯一确定的线性泛函，且满足

$$\varphi(x) \leqslant p(x) \quad (x \in \mathscr{D}),$$

故 $\varphi \in \mathscr{F}$，显然 φ 是 M 的上确界，由 Zorn 引理，$\mathscr{F}$ 中有一极大元 F_0，我们可以证明 $\mathscr{D}(F_0)=X$. 事实上，设存在 $x_0 \in X-\mathscr{D}(F_0)$，则按(1)所证可将 F_0 延拓到 $\mathscr{D}(F_0)$ 与 x_0 张成的子空间上，并且满足引理中条件(2)，这与 F_0 的极大性矛盾，因此 $\mathscr{D}(F_0)=X$，F_0 即为引理所要求的泛函．

注 如果引理中 X 为复的线性空间，f 是 G 上的可加、实齐性的实泛函，则同样可证明存在定义在 X 上的可加、实齐性的实泛函 F 满足引理中的条件(1)，(2).

定理 2.1 （汉恩-巴拿赫，H. Hahn-Banach） 设 G 是赋范线性空间 X 的子空间，f 是 G 上的有界线性泛函，则存在 X 上的有界线性泛函 $F(x)$，满足

(1) $x \in G$ 时，$F(x)=f(x)$，

(2) $\|F\|=\|f\|_G$，这里 $\|f\|_G$ 表示 f 作为 G 上的有界线泛函的范数．

证 设 $f(x)=\varphi(x)+i\psi(x)$ $(x \in G)$，这里 $\varphi(x)$，$\psi(x)$ 分别表示 $f(x)$ 的实部和虚部．φ,ψ 是 G 上的实齐性、可加实泛函．注意到

$$i[\varphi(x)+i\psi(x)]=if(x)=f(ix)=\varphi(ix)+i\psi(ix),$$

则

$$\varphi(ix)=-\psi(x).$$

于是

$$f(x)=\varphi(x)-i\varphi(ix) \quad (x \in G), \tag{2.6}$$

$$|\varphi(x)|=|\mathrm{Re} f(x)| \leqslant |f(x)| \leqslant \|f\|_G \|x\|.$$

令

$$p(x)=\|f\|_G \|x\|,$$

则 $p(x)$ 是定义在 X 上的次可加、正齐性泛函，且当 $x \in G$ 时，

$$\varphi(x) \leqslant |f(x)| \leqslant p(x) \tag{2.7}$$

故 $\varphi(x)$,$p(x)$满足引理条件(见注),φ 可延拓为 X 上的实齐性、可加实泛函 $\varphi_0(x)$,使

$$\varphi_0(x) \leqslant p(x) \quad (x \in X),$$

对照(2.6),我们令

$$F(x) = \varphi_0(x) - i\varphi_0(ix) \qquad (x \in X), \tag{2.8}$$

则 F 满足可加性和实齐性(即 α 为实数时,$F(\alpha x)=\alpha F(x)$). $x\in G$ 时,显然有

$$F(x) = \varphi(x) - i\varphi(ix) = f(x).$$

下面证明 F 的齐次性和 $\|F\| = \|f\|_G$. 因为

$$\begin{aligned} F(ix) &= \varphi_0(ix) - i\varphi_0(-x) = \varphi_0(ix) + i\varphi_0(x) \\ &= i[\varphi_0(x) - i\varphi_0(ix)] = iF(x), \end{aligned}$$

所以,对任何复数 $\alpha=\alpha_1+i\alpha_2$,有

$$F(\alpha x) = \alpha F(x),$$

故 F 是定义在 X 上的线性泛函.

令 $\theta=\arg F(x)$,则

$$\begin{aligned} |F(x)| &= \mathrm{e}^{-i\theta}F(x) = F(\mathrm{e}^{-i\theta}x) \\ &= \varphi_0(\mathrm{e}^{-i\theta}x) - i\varphi_0(i\mathrm{e}^{-i\theta}x). \end{aligned}$$

因为 $|F(x)|$ 为实数,故虚部 $\varphi_0(i\mathrm{e}^{-i\theta}x)=0$,则

$$\begin{aligned} |F(x)| &= \varphi_0(\mathrm{e}^{-i\theta}x) \leqslant p(\mathrm{e}^{-i\theta}x) \\ &= \|f\|_G \cdot \|\mathrm{e}^{-i\theta}x\| = \|f\|_G \cdot \|x\|. \end{aligned}$$

所以

$$\|F\| \leqslant \|f\|_G.$$

但 $\|F\| \geqslant \|f\|_G$ 显然成立,故 $\|F\| = \|f\|_G$.

推论 1 设 X 是赋范线性空间,$X\neq\{0\}$,则对任一 $x_0\in X$,必存在 $f\in X^*$,使

$$\|f\| = 1, f(x_0) = \|x_0\|.$$

证 先设 $x_0\neq 0$,令 $G=\{\alpha x_0:\alpha\in K\}$,在 G 上定义泛函

$$\varphi(\alpha x_0) = \alpha\|x_0\|,$$

则 φ 是定义在 G 上的有界线性泛函，并满足 $\varphi(x_0)=\|x_0\|$，$\|\varphi\|_G=1$. 由定理 2.1，φ 可保范延拓到整个 X 上. 记 f 是 φ 的保范延拓，则 $f\in X^*$，且

$$\|f\| = 1, f(x_0) = \varphi(x_0) = \|x_0\|.$$

若 $x_0=0$，$\because X\neq\{0\}$，我们可任取 $x_1\in X$，$x_1\neq 0$，则存在 $f\in X^*$，使

$$\|f\| = 1, f(x_1) = \|x_1\|.$$

从而 $f(x_0)=0=\|x_0\|$.

由推论 1 可以看到：

1° 若 $X\neq\{0\}$，则必存在"足够多"的非零有界线性泛函，

2° 若对一切 $f\in X^*$，$f(x_0)=0$，则 $x_0=0$.

推论 2 设 G 是赋范线性空间 X 的子空间，$x_0\in X$，如果

$$d = \rho(x_0,G) = \inf_{x\in G}\|x_0 - x\| > 0,$$

则必存在 $f\in X^*$，使得

$$x\in G \text{ 时}, f(x) = 0, f(x_0) = d \text{ 以及 } \|f\| = 1.$$

证 令 $G_1=\{\alpha x_0+x: x\in G, \alpha\in K\}$，则 G_1 是 X 的一个子空间，由于 $x_0\overline{\in}G$，所以 G_1 中任一元素 y 可唯一地表示为

$$y = \alpha x_0 + x\ (\alpha\in K, x\in G).$$

令

$$\varphi(y) = \alpha d\ (y\in G_1),$$

则 φ 是 G_1 上唯一确定的有界线性泛函，且满足

$$\varphi(x_0) = d, x\in G \text{ 时}, \varphi(x) = 0, \|\varphi\|_{G_1} = 1.$$

事实上，φ 是 G_1 的线性泛函，$\varphi(x_0)=d$ 以及 $\varphi(x)=0(x\in G)$ 都是显然的. 因为

$$|\varphi(\alpha x_0 + x)| = |\alpha|d \leqslant |\alpha|\cdot\left\|x_0 + \frac{x}{\alpha}\right\| = \|\alpha x_0 + x\|,$$

所以 $\|\varphi\|_{G_1}\leqslant 1$. 另一方面，存在 $x_n\in G$，使

$$\lim_{n\to\infty}\|x_0 - x_n\| = d,$$

$$\|\varphi\|_{G_1}\|x_0-x_n\| \geqslant |\varphi(x_0-x_n)| = d.$$

于是

$$\|\varphi\|_{G_1} \geqslant \frac{d}{\|x_0-x_n\|} \quad (n=1,2,\cdots).$$

令 $n\to\infty$,即得

$$\|\varphi\|_{G_1} \geqslant 1,$$

故 $\|\varphi\|_{G_1}=1$. 再由定理 2.1 知,存在 $f\in X^*$,使 $\|f\|=1, f(x_0)=\varphi(x_0)=d$ 以及 $x\in G$ 时,$f(x)=\varphi(x)=0$.

推论 3 设 M 是赋范线性空间 X 的一个子集,G 为 M 张成的子空间,则 $x_0\in\overline{G}$ 的充要条件是:对任一满足 $f(x)=0(x\in M)$ 的有界线性泛函 f,必有 $f(x_0)=0$.

证 必要性显然.

充分性:设条件成立,而 $x_0\bar{\in}\overline{G}$,则由推论 2,存在 $f\in X^*$,使 $\|f\|=1, f(x_0)=\rho(x_0,G)>0$ 以及 $f(x)=0(x\in G)$,按照假设条件,对这样的 $f\in X^*$,必有 $f(x_0)=0$,矛盾,故 $x_0\in\overline{G}$.

推论 3 提供了一个判别 X 中元素 x_0 能否用 M 中的元素的线性组合任意精确逼近的一个方法,这在逼近论中是常用的.

根据引理的证明,当 $c'\neq c''$时,满足引理中条件(1),(2)的延拓是不唯一的,因此,一般来说,f 的保范延拓不唯一,且可以证明:如果 f 的保范延拓不唯一,则 f 的保范延拓全体所组成的集合之势$\geqslant\aleph$.

事实上,设 $f_1\neq f_2$ 都是 f 的保范延拓,我们令

$$f_\alpha = \frac{f_1+\alpha f_2}{1+\alpha} \quad (\alpha\geqslant 0),$$

则 $f_\alpha\in X^*$,f_α 是 f 的延拓,又因为

$$\|f_\alpha\| \leqslant \frac{(1+\alpha)\|f\|_G}{1+\alpha} = \|f\|_G.$$

以及

$$\|f_\alpha\| = \sup_{\|x\|=1}|f_\alpha(x)| \geqslant \sup_{\substack{\|x\|=1\\ x\in G}}|f(x)| = \|f\|_G,$$

故 $\|f_\alpha\| = \|f\|_G$，$\{f_\alpha\}_{\alpha\geqslant 0}$的势为$\aleph$.

例 1 设 $X=R^2$，$x=(\xi_1,\xi_2)\in R^2$，$\|x\| = |\xi_1|+|\xi_2|$，则 X 是 Banach 空间，令 $G=\{x:x=(\xi_1,0)\}$，在 G 上定义泛函

$$f(x) = \xi_1,(x \in G).$$

显然 f 是 G 上的有界线性泛函，且 $\|f\|_G=1$. 任取 α，$|\alpha|\leqslant 1$，在 X 上定义有界线性泛函 F_α：

$$F_\alpha(x) = \xi_1 + \alpha\xi_2 \qquad (x \in X),$$

容易证明 $\|F_\alpha\| =1$，则每个 F_α 是 f 的一个保范延拓，而$\{F_\alpha\}_{|\alpha|\leqslant 1}$的势为$\aleph$.

例 2 设 X 为赋范线性空间，$x\in X$，试证明

$$\|x\| = \sup_{\substack{f\in X^* \\ \|f\|=1}} |f(x)|.$$

证 设 $f\in X^*$，$\|f\| =1$，则$|f(x)|\leqslant \|x\|$，所以

$$\|x\| \geqslant \sup_{\substack{f\in X^* \\ \|f\|=1}} |f(x)|.$$

另一方面，由推论 1，为存在 $f\in X^*$，使 $\|f\| =1$，$f(x)= \|x\|$，故

$$\sup_{\substack{f\in X^* \\ \|f\|=1}} |f(x)| \geqslant \|x\|.$$

这就证明了我们的结论.

例 3 设 X,Y 是赋范线性空间，则 $\mathscr{B}(X,Y)$完备的充要条件是 Y 是完备的.

证 只需证明必要性. 设$\{y_n\}$是 Y 中的任一基本列，取 $x_0\in X$，$\|x_0\| =1$，则存在 $f\in X^*$，使

$$f(x_0) = \|x_0\| = 1.$$

我们定义 $T_n\in \mathscr{B}(X,Y)$如下：

$$T_n x = f(x)y_n \quad (n = 1,2,\cdots).$$

因为

$$\|(T_n - T_m)x\| = |f(x)| \cdot \|y_n - y_m\|$$

$$\leqslant \|f\| \cdot \|y_n - y_m\| \|x\| \quad (\forall x \in X),$$

故

$$\|T_n - T_m\| \leqslant \|f\| \cdot \|y_n - y_m\| \to 0 \ (n,m \to \infty)$$

由于$\mathscr{B}(X,Y)$完备，必存在$T \in \mathscr{B}(X,Y)$，使

$$\|T_n - T\| \to 0 \ (n \to \infty)$$

现在$y_n = T_n x_0$，

$$\|y_n - Tx_0\| = \|T_n x_0 - Tx_0\|$$

$$\leqslant \|T_n - T\| \cdot \|x_0\| \to 0 \ (n \to \infty)$$

因此，Y是完备的．

2.2 某些具体空间上的有界线性泛函

本段我们利用泛函延拓定理来找出$C[a,b]$，$L^p[a,b]$$(p \geqslant 1)$上有界线性泛函的表示，即求出$(C[a,b])^*$和$(L^p[a,b])^*$的具体形式，同时也求出了$l^p(p \geqslant 1)$的共轭空间．为简单起先，本段均考虑实空间上的实线性泛函．

1．空间$C[a,b]$上的有界线性泛函

定理 2.2 (Riesz) 设$f \in (C[a,b])^*$，则必存在$v(t) \in BV[a,b]$（$BV[a,b]$表示囿变函数空间），使得对一切$x(t) \in C[a,b]$，有

$$f(x) = \int_a^b x(t) \mathrm{d}v(t), \tag{2.9}$$

且

$$\bigvee_a^b (f) = \|f\|.$$

反之，对任一$v(t) \in BV[a,b]$，(2.9)式定义了$C[a,b]$上唯一的有界线性泛函f. 这里(2.9)式右边积分是RS积分．

证 设$f \in (C[a,b])^*$，用$B[a,b]$表示定义在$[a,b]$上的有界可测函数全体，其范数$\|x\| = \sup\limits_{t \in [a,b]} |x(t)|$，则$C[a,b]$是$B[a,b]$的一个子空间，故$f$可延拓到$B[a,b]$上，且保持范数不变，记延拓

后的泛函为 F，令

$$\chi_s(t) = \begin{cases} 1, & \text{当 } a \leqslant t \leqslant s, \\ 0, & \text{当 } s < t \leqslant b, \end{cases} \quad s \in (a,b],$$

并规定 $\chi_a(t)=0$. 再令

$$v(s) = F(\chi_s).$$

我们证明 $v(s)\in \mathrm{BV}[a,b]$，且 $\bigvee_a^b(v)\leqslant \|f\|$. 事实上，取分点

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b,$$

令

$$\varepsilon_j = \mathrm{sgn}[v(t_j) - v(t_{j-1})], \quad j = 1,2,\cdots,n,$$

则

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} |v(t_j) - v(t_{j-1})| &= \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j [v(t_j) - v(t_{j-1})] \\ &= \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j [F(\chi_{t_j}) - F(\chi_{t_{j-1}})] \\ &= F[\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j (\chi_{t_j} - \chi_{t_{j-1}})] \\ &\leqslant \|F\| \cdot \|\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j (\chi_{t_j} - \chi_{t_{j-1}})\|. \end{aligned}$$

因为 $\|F\| = \|f\|$ 以及 $\|\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j (\chi_{t_j} - \chi_{t_{j-1}})\| \leqslant 1$，故 $v(s) \in \mathrm{BV}[a,b]$，且

$$\bigvee_a^b (v) \leqslant \|f\|.$$

任取 $x(t)\in C[a,b]$，作阶梯函数

$$y(s) = \sum_{j=1}^{n} x(t_j)[\chi_{t_j}(s) - \chi_{t_{j-1}}(s)].$$

$$F(y) = \sum_{j=1}^{n} x(t_j)[v(t_j) - v(t_{j-1})]. \tag{2.10}$$

记 $\delta = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} |t_j - t_{j-1}|$，则当 $\delta\to 0$ 时，有 $\|y-x\|\to 0$，由 F 的连续性得

$$F(y) \to F(x) \ (\delta \to 0).$$

再由 RS 积分定义

$$\lim_{\delta \to 0} F(y) = \int_a^b x(t) \mathrm{d} v(t).$$

所以

$$F(x) = \int_a^b x(t) \mathrm{d} v(t).$$

但 $x(t) \in \mathrm{C}[a,b]$时，$f(x)=F(x)$，故对一切 $x(t) \in \mathrm{C}[a,b]$，有

$$f(x) = \int_a^b x(t) \mathrm{d} v(t).$$

由 RS 积分的性质，

$$|f(x)| \leqslant \| x \| \cdot \bigvee_a^b (v),$$

故 $\| f \| \leqslant \bigvee_a^b (v)$，于是 $\| f \| = \bigvee_a^b (v)$.

反之，任取 $v(t) \in \mathrm{BV}[a,b]$，令

$$f(x) = \int_a^b x(t) \mathrm{d} v(t) \quad (x(t) \in \mathrm{C}[a,b]),$$

则易知 $f \in (\mathrm{C}[a,b])^*$.

注 定理 2.2 中 $v(t)$不是唯一的，因为如果 $v(t)$满足定理 2.2 的要求，则对任一常数 C，$v(t)+C$ 也满足定理 2.2 的要求．但我们可以证明：如果 $v(t)$还满足 $v(a)=0$，$t \in (a,b)$时，$v(t+0)=v(t)$，则定理 2.2 中的 $v(t)$是唯一的．若记

$$\mathrm{BV}_0[a,b] = \{v(t) \in \mathrm{BV}[a,b] : v(a) = 0,$$
$$v(t+0) = v(t), t \in (a,b)\},$$

则

$$(\mathrm{C}[a,b])^* \cong \mathrm{BV}_0[a,b].$$

这里记号“$\cong$”表示**等距同构**（证明可参阅文献[7]或[9]），也简记为

$$(\mathrm{C}[a,b])^* = \mathrm{BV}_0[a,b].$$

2．$\mathrm{L}^p[a,b]$上的有界线性泛函（$1 \leqslant p < \infty$）

*定理 2.3　设 $f\in(\mathrm{L}^p[a,b])^*$ ($p>1$)，则存在唯一的 $y(t)\in \mathrm{L}^q[a,b]$，其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，使

$$f(x)=\int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t, \tag{2.11}$$

且

$$\|f\|=\|y\|_q=(\int_a^b |y(t)|^q\mathrm{d}t)^{1/q}. \tag{2.12}$$

反之，对任一 $y(t)\in \mathrm{L}^q[a,b]$，由(2.11)式所定义的泛函 $f\in(\mathrm{L}^p[a,b])^*$，且(2.12)成立．

证　设 $f\in(\mathrm{L}^p[a,b])^*$，令

$$\chi_s(t)=\begin{cases}1, 当\ a\leqslant t\leqslant s,\\ 0, 当\ s<t\leqslant b,\end{cases}\quad (s\in[a,b]).$$

$\chi_s(t)\in \mathrm{L}^p[a,b]$，再令

$$g(s)=f(\chi_s), \tag{2.13}$$

我们证明 $g(s)\in \mathrm{AC}[a,b]$（这里 $\mathrm{AC}[a,b]$ 表示 $[a,b]$ 上的绝对连续函数）. 设 $\delta_j=[s_j,t_j]$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 为 $[a,b]$ 中一组互不相交的区间，记 $\varepsilon_j=\mathrm{sgn}[g(t_j)-g(s_j)]$，可设存在一个 $\varepsilon_j\neq 0$，则

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n |g(t_j)-g(s_j)| &= \sum_{j=1}^n \varepsilon_j[g(t_j)-g(s_j)]\\ &= f[\sum_{j=1}^n \varepsilon_j(\chi_{t_j}-\chi_{s_j})]\\ &\leqslant \|f\|\cdot\|\sum_{j=1}^n \varepsilon_j(\chi_{t_j}-\chi_{s_j})\|_p\\ &= \|f\|\cdot(\int_a^b|\sum_{j=1}^n \varepsilon_j(\chi_{t_j}(\xi)-\chi_{s_j}(\xi))|^p\mathrm{d}\xi)^{1/p}\\ &\leqslant \|f\|\cdot(\sum_{j=1}^n\int_{\delta_j}\mathrm{d}\xi)^{1/p}\\ &= \|f\|\cdot(\sum_{j=1}^n m\delta_j)^{1/p}.\end{aligned}$$

故 $g(s) \in AC[a,b]$.

令 $y(s)=g'(s)$，则 $y(s) \in L[a,b]$，我们要证明 $y(s) \in L^q[a,b]$以及(2.11)，(2.12)成立．注意到 $\chi_a(t) \sim 0$，所以 $g(a)=f(\chi_a)=0$，

$$g(s) - g(a) = \int_a^s y(t)\mathrm{d}t.$$

故

$$f(\chi_s) = \int_a^s y(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \chi_s(t)y(t)\mathrm{d}t. \tag{2.14}$$

现设 $x(t)$为任一有界可测函数，$|x(t)| \leqslant M(\forall\, t \in [a,b])$，据鲁金定理，存在连续函数 $x_n(t)$，使 $x_n(t) \xrightarrow{\text{a.e.}} x(t)$，且 $|x_n(t)| \leqslant M(\forall\, n \in N, t \in [a,b])$．对每个 $x_n(t)$，又存在阶梯函数 $\varphi_n(t)$，使 $|\varphi_n(t)| \leqslant M$ 以及

$$|\varphi_n(t) - x_n(t)| < \frac{1}{n} \quad (t \in [a,b]),$$

故存在阶梯函数 $\varphi_n(t) \xrightarrow{\text{a.e.}} x(t)$，且 $|\varphi_n(t)| \leqslant M$．由(2.14)知

$$f(\varphi_n) = \int_a^b \varphi_n(t)y(t)\mathrm{d}t, \tag{2.15}$$

再由控制收敛定理．

$$\lim_{n\to\infty} f(\varphi_n) = \lim_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n(t)y(t)\mathrm{d}t = \int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t,$$

以及

$$\lim_{n\to\infty} \| \varphi_n - x \|_p = \lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b |\varphi_n(t) - x(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{1/p} = 0.$$

因为 f 连续，故

$$f(x) = \int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t, \tag{2.16}$$

对一切有界可测函数成立．

下面证明 $y(t) \in L^q[a,b]$以及对一切 $x(t) \in L^p[a,b]$(12.11)成立．为此，令

$$h_N(t)=\begin{cases}|y(t)|^{q-1}\operatorname{sgn}y(t), & \text{当 } |y(t)|\leqslant N,\\ 0, & \text{当 } |y(t)|>N,\end{cases}$$

和

$$y_N(t)=\begin{cases}y(t), & \text{当 } |y(t)|\leqslant N,\\ 0, & \text{当 } |y(t)|>N,\end{cases}$$

则

$$\begin{aligned} f(h_N)&=\int_a^b h_N(t)y(t)\mathrm{d}t=\int_{E_N}h_N(t)y(t)\mathrm{d}t\\ &=\int_{E_N}|y(t)|^q\mathrm{d}t=\int_a^b|y_N(t)|^q\mathrm{d}t, \end{aligned}\tag{2.17}$$

其中 $E_N=\{t\in[a,b]:|y(t)|\leqslant N\}$.

另一方面

$$\begin{aligned} f(h_N)&\leqslant \|f\|\cdot\|h_N\|_p=\|f\|\cdot\left(\int_{E_N}|h_N(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{1/p}\\ &=\|f\|\cdot\left(\int_{E_N}|y(t)|^q\mathrm{d}t\right)^{1/p}\\ &=\left(\int_a^b|y_N(t)|^q\mathrm{d}t\right)^{1/p}\cdot\|f\|. \end{aligned}\tag{2.18}$$

由(12.17)和(12.18)得

$$\int_a^b|y_N(t)|^q\mathrm{d}t\leqslant\|f\|\cdot\left(\int_a^b|y_N(t)|^q\mathrm{d}t\right)^{1/p}.$$

故

$$\left(\int_a^b|y_N(t)|^q\mathrm{d}t\right)^{1/q}\leqslant\|f\|.\tag{2.19}$$

上式中,令 $N\to\infty$,由法杜定理得

$$\|y\|_q=\left(\int_a^b|y(t)|^q\mathrm{d}t\right)^{1/q}\leqslant\|f\|.\tag{2.20}$$

即 $y(t)\in\mathrm{L}^q[a,b]$.

现任取 $x(t)\in\mathrm{L}^p[a,b]$,据第 11 章 § 2 定理 2.3 的证明,必存在有界可测函数序列 $\{x_n(t)\}$,使

$$\int_a^b |x_n(t) - x(t)|^p \mathrm{d}t \to 0 \ (n \to \infty),$$

其中

$$x_n(t) = \begin{cases} x(t), & 当\ |x(t)| \leqslant n, \\ 0, & 当\ |x(t)| > n. \end{cases}$$

由(2.16)

$$f(x_n) = \int_a^b x_n(t) y(t) \mathrm{d}t.$$

再由控制收敛定理并利用 f 的连续性,在上式中令 $n \to \infty$,得

$$f(x) = \int_a^b x(t) y(t) \mathrm{d}t,$$

即(12.11)成立.

最后证明 $\| f \| = \| y \|_q$ 以及 $y(t)$是唯一的. 因为 $y(t) \in L^q[a,b]$,据 Hölder 不等式,对一切 $x(t) \in L^p[a,b]$,有

$$|f(x)| = \left| \int_a^b x(t) y(t) \mathrm{d}t \right| \leqslant \| x \|_p \cdot \| y \|_q,$$

故

$$\| f \| \leqslant \| y \|_q. \tag{2.21}$$

由(2.20)和(2.21)即得 $\| f \| = \| y \|_q$.

$y(t)$的唯一性:设存在 $y_1(t) \in L^q[a,b]$,使

$$f(x) = \int_a^b x(t) y_1(t) \mathrm{d}t \quad (x(t) \in L^p[a,b]),$$

则

$$\int_a^b x(t)[y(t) - y_1(t)] \mathrm{d}t = 0 \quad (\forall\ x(t) \in L^p[a,b]).$$

取 $x(t) = \mathrm{sgn}(y(t) - y_1(t)) \in L^p[a,b]$, 则得

$$\int_a^b |y(t) - y_1(t)| \mathrm{d}t = 0,$$

故 $y_1(t) \overset{\text{a.e.}}{=\!=} y(t)$, 唯一性得证.

反之,对任一 $y(t) \in L^q[a,b]$,令

$$f(x)=\int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t \quad (x(t)\in \mathrm{L}^p[a,b]),$$

则 f 显然是定义在 $\mathrm{L}^p[a,b]$ 上的有界线性泛函，且 $\|f\|=\|y\|_q$. 作映射

$T:(\mathrm{L}^p[a,b])^*\to \mathrm{L}^q[a,b]$ 如下：

$$Tf=y(t),\ f\in(\mathrm{L}^p[a,b])^*$$

易知 T 是 $(\mathrm{L}^p[a,b])^*$ 到 $\mathrm{L}^q[a,b]$ 上的等距同构映射，故

$$(\mathrm{L}^p[a,b])^*=\mathrm{L}^q[a,b].$$

对于 $p=1$，我们可以证明 $(\mathrm{L}^p[a,b])^*=\mathrm{L}^\infty[a,b]$. 事实上，如同定理 2.3 中一样作函数 $g(s)$，此时，$g(s)$ 不仅绝对连续，而且满足李普希兹条件. 这是因为

$$\begin{aligned}|g(t_2)-g(t_1)|&=|f(\chi_{t_2}-\chi_{t_1})|\\&\leqslant \|f\|\cdot\|\chi_{t_2}-\chi_{t_1}\|=\|f\|\cdot|t_2-t_1|.\end{aligned}$$

因此 $|g'(t)|\overset{a.e.}{\leqslant}\|f\|$，如果令 $y(t)=g'(t)$，则 $y(t)\in \mathrm{L}^\infty[a,b]$，

$$\|y\|_\infty\leqslant\|f\|.$$

类似地，我们可以证明

$$f(x)=\int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t \quad (\forall\ x(t)\in \mathrm{L}[a,b]).$$

从而可得

$$\|f\|\leqslant\|y\|_\infty,$$

故 $\|f\|=\|y\|_\infty$. 反之，对任一 $y(t)\in \mathrm{L}^\infty[a,b]$，令

$$f(x)=\int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t \quad (x(t)\in \mathrm{L}[a,b]),$$

则 $f\in(\mathrm{L}[a,b])^*$，且 $\|f\|=\|y\|_\infty$，故

$$(\mathrm{L}[a,b])^*=\mathrm{L}^\infty[a,b].$$

3. $l^p(p\geqslant1)$ 的共轭空间

定理 2.4 $(l^1)^*=l^\infty$.

证 设 $f\in(l^1)^*$. 令 $e_n=(\underbrace{0,\cdots,0,1}_{n\text{ 位}},0,\cdots)$，$n=1,2,3,\cdots$.

显然,对任一 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\in l^1$,有

$$x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}x_ie_i.$$

记 $\eta_i=f(e_i),i=1,2,3,\cdots$,则 $|\eta_i|\leqslant\|f\|$. 因此,$\eta=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots)\in l^\infty$,而且

$$\|\eta\|_\infty=\sup_i|\eta_i|\leqslant\|f\|.$$

由 f 的连续性,

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i\eta_i\quad(x\in l^1).$$

这就是说,l^1 上的连续线性泛函只能是上述形式,其中

$$\eta_i=f(e_i),i=1,2,3,\cdots,$$

$$\eta=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots)\in l^\infty.$$

反之,如果 $\eta=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots)\in l^\infty$,令

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i\eta_i,(x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\in l^1),$$

则显然有 $f\in(l^1)^*$,且 $\|f\|=\|\eta\|_\infty$,因此

$$(l^1)^*=l^\infty.$$

类似地,对于 $p>1$,我们可以证明

$$(l^p)^*=l^q,$$

其中$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 对 $f\in(l^p)^*$,存在唯一的 $\eta=(\eta_i)\in l^q$,使

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i\eta_i\quad(x=(x_i)\in l^p),$$

以及

$$\|f\|=\|\eta\|_q.$$

详细证明可参阅文献[7].

2.3 共轭空间·共轭算子

我们已经知道赋范空间 X 的共轭空间 X^* 是 Banach 空间,因此它也有共轭空间,称 X^* 的共轭空间为**二次共轭空间**,记为

X^{**}，类似地，还可以定义 X^{***}，…等等．

现在来考察 X 与 X^{**} 的关系，取定 $x\in X$，因为对一切 $f\in X^*$ 成立

$$|f(x)|\leqslant\|x\|\cdot\|f\|,$$

因此，如果将 $f(x)$ 看作定义在 X^* 上的线性泛函，它是有界的，令

$$x^{**}(f)=f(x)\ (f\in X^*),\tag{2.22}$$

则 $x^{**}\in X^{**}$．作映射 $J:X\to X^{**}$：

$$Jx=x^{**}.$$

易知映射 J 具有下列性质：

1° J 是线性映射，即

$J(x_1+x_2)=Jx_1+Jx_2$，$J(\alpha x)=\alpha(Jx)$；

2° J 是一个等距映射，因此是一对一的．

事实上，因为对任一 $f\in X^*$，有

$$\begin{aligned}(x_1+x_2)^{**}(f)&=f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)\\&=x_1^{**}(f)+x_2^{**}(f),\end{aligned}$$

$$(\alpha x)^{**}(f)=f(\alpha x)=\alpha f(x)=\alpha x^{**}(f).$$

又

$$\|x^{**}\|=\sup_{\|f\|=1}|x^{**}(f)|=\sup_{\|f\|=1}|f(x)|=\|x\|,$$

即 $\|Jx\|=\|x\|$．

故 J 是 $X\to X^{**}$ 中的等距同构映射，称作“自然嵌入”映射，$X=JX$．我们可以把 X 看作 X^{**} 的一个子空间，x 和 x^{**} 可以不加区别．一般说来，$X\neq X^{**}$（即 $JX\subsetneqq X^{**}$），如果 $JX=X^{**}$，则称 X 为**自反空间**．

由前一段的讨论，我们知道当 $p>1$ 时，$L^p[a,b]$，l^p 均是自反空间，下面以 $L^p[a,b]$（$p>1$）为例说明．已经知道 $(L^p[a,b])^*$ 与 $L^q[a,b]$ 等距同构，设等距同构映射为 τ，任取 $f\in(L^p[a,b])^*$，$\tau f=y\in L^q[a,b]$，现设 $F\in(L^p[a,b])^{**}$，$F(f)=F(\tau^{-1}y)$，记 $\widetilde{F}(y)=F(\tau^{-1}y)$，则 $\widetilde{F}$ 是 $L^q[a,b]$ 上的有界线性泛函，故存在 $x(t)\in$

$L^p[a,b]$，使 $\widetilde{F}(y)=\int_a^b y(t)x(t)\mathrm{d}t=f(x)$，所以 $F=Jx$，即 $JX=X^{**}$，$L^p[a,b]$自反．

定理 2.5　设 X 是赋范线性空间，如果 X^* 是可分的，则 X 也可分．

证　设 X^* 可分，则 X^* 的单位球面

$$S=\{f\in X^*:\|f\|=1\}$$

也可分，从而可以 S 中取出一可数稠密子集 $\{f_n\}$. 对每个 $n\in N$，由于 $\|f_n\|=1$，则存在 $x_n\in X$，$\|x_n\|=1$，使

$$|f_n(x_n)|>\frac{1}{2}.$$

记 $\{x_n\}$ 张成的闭子空间为 X_0，易证 X_0 可分．如果 $X_0\neq X$，据 Hahn-Banach 定理的推论 2，存在 $f_0\in X^*$，使 $\|f_0\|=1$，$x\in X_0$ 时，$f_0(x)=0$. 但是

$$\|f_n-f_0\|\geqslant|f_n(x_n)-f_0(x_n)|=|f_n(x_n)|>\frac{1}{2},$$

这与 $\{f_n\}$ 在 X^* 的单位球面 S 上稠密矛盾，故 $X_0=X$，X 是可分的．

利用定理 2.5，立即可知 $L[a,b]$ 不是自反的．事实上，因为 $(L[a,b])^*=L^\infty[a,b]$，若 $L[a,b]$ 自反，则 $(L^\infty[a,b])^*=L[a,b]$ 是可分的，按照定理 2.5，$L^\infty[a,b]$ 也是可分的，矛盾．从而 $L[a,b]$ 非自反．

下面介绍有界线性算子 T 的共轭算子 T^* 及其简单性质．

定义 2.1　设 X,X_1 均是赋范线性空间，$T\in\mathscr{B}(X,X_1)$，任取 $f\in X_1^*$，令

$$f^*(x)=f(Tx)\ (x\in X),\tag{2.23}$$

则 $f^*\in X^*$，记 $T^*f=f^*$，称 T^* 为 T 的**共轭算子**．

由定义，T^* 是 $X_1^*\to X^*$ 的线性算子，

$$T^*f(x)=f(Tx)\quad(f\in X_1^*,x\in X).\tag{2.24}$$

定理 2.6　设 X,X_1 为赋范线性空间，$T\in\mathscr{B}(X,X_1)$，则 T^*

$\in \mathscr{B}(X_1^*, X_*)$，且 $\|T^*\| = \|T\|$.

证 T^* 是线性算子显然．由定义对一切 $f \in X_1^*$ 和 $x \in X$，有

$$|(T^* f)(x)| = |f(Tx)| \leqslant \|f\| \cdot \|T\| \cdot \|x\|,$$

故

$$\|T^* f\| \leqslant \|T\| \cdot \|f\| \quad (\forall f \in X_1^*).$$

于是 T^* 有界，且 $\|T^*\| \leqslant \|T\|$. 另一方面，由 Hahn-Banach 定理推论 1，对任一 $x \in X$，存在 $f_0 \in X_1^*$，使

$$f_0(Tx) = \|Tx\|, \|f_0\| = 1,$$

则

$$\|Tx\| = |f_0(Tx)|$$
$$= |T^* f_0(x)| \leqslant \|T^*\| \cdot \|x\|.$$

所以 $\|T\| \leqslant \|T^*\|$. 故 $T^* \in \mathscr{B}(X_1^*, X^*)$，$\|T^*\| = \|T\|$.

定理 2.7 设 X, X_1, X_2 都是赋范线性空间，$T, S \in \mathscr{B}(X, X_1)$，$R \in \mathscr{B}(X_1, X_2)$，则

(1) $(\alpha T + \beta S)^* = \alpha T^* + \beta S^*$，$\alpha, \beta \in K$，

(2) $(RT)^* = T^* R^*$，

(3) $T^{**} \in \mathscr{B}(X^{**}, X_1^{**})$，$\|T^{**}\| = \|T\|$，且

$$T^{**} x^{**} = (Tx)^{**} \quad (\forall x \in X) \tag{2.25}$$

这里 $x^{**} = Jx$，$(Tx)^{**} = J(Tx)$.

证 (1) 显然成立．

(2) 对任一 $f \in X_2^*$ 和 $x \in X$，利用(2.24)式，

$$[(RT)^* f](x) = f(RTx) = f[R(Tx)]$$
$$= (R^* f)(Tx) = (T^*(R^* f))(x),$$

故

$$(RT)^* = T^* R^*.$$

(3) $T^{**} \in \mathscr{B}(X^{**}, X_1^{**})$ 及 $\|T^{**}\| = \|T\|$ 显然，我们仅证明

$$T^{**} x^{**} = (Tx)^{**} \quad (\forall x \in X).$$

任取 $f\in X_1^*$，$x\in X$，据 $T^{**}=(T^*)^*$，T^* 以及 $x^{**}=Jx$ 的定义（即(2.24)和(2.22)式），

$$T^{**}x^{**}(f)=x^{**}(T^*f)=(T^*f)(x)$$
$$=f(Tx)=(Tx)^{**}(f).$$

所以

$$T^{**}x^{**}=(Tx)^{**}\quad(\forall\ x\in X).$$

如果将 X 视为 X^{**} 的子空间，X_1 视为 X_1^{**} 的子空间，则 x 与 x^{**} 可视为同一，Tx 与 $(Tx)^{**}$ 可视为同一，从而(2.25)式可记为

$$T^{**}x=Tx\quad(x\in X),\tag{2.26}$$

这表明 T^{**} 是 T 的延拓．

例 4 设 $C_0=\{(x_n):\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0\}$，$x=(x_n)\in C_0$，$\|x\|=\sup\limits_n|x_n|$，定义 $T:C_0\to C_0$ 如下：

$$Tx=(\frac{x_n}{n}),\quad x=(x_n)\in C_0.$$

则 $\|T\|=1$，T 的值域 $\mathscr{R}(T)\neq C_0$，但 $\overline{\mathscr{R}(T)}=C_0$，并求出 T^*．

解 $\|T\|=1$ 显然．因为对一切 $x\in C_0$，

$$Tx\neq(\frac{1}{\sqrt{n}}).$$

故 $\mathscr{R}(T)\neq C_0$，但显然有

$$\mathscr{R}(T)\supset E_0=\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_ie_i:\alpha_i\in K,i=1,2,\cdots,n,n\in N\},$$

其中 $e_i=(\underbrace{0,\cdots,0,1}_{i\text{ 位}},0,\cdots)\in C_0\quad(i=1,2,3,\cdots)$．因为 $\overline{E_0}=C_0$，所以 $\overline{\mathscr{R}(T)}=C_0$．

读者作为练习可以证明：$C_0^*=l$，$f\in C_0^*$，必存在 $(\eta_n)\in l$，使 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n\eta_n(\forall\ x=(x_n)\in C_0)$．所以 $T^*:l\to l$．任取 $f=(\eta_n)\in l=C_0^*$ 和 $x=(x_n)\in C_0$，

$$(T^* f)(x) = f(Tx) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}\eta_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot \frac{\eta_n}{n},$$

所以

$$T^* f = (\frac{\eta_n}{n}).$$

例 5　设 $K(t,s)$是 $a\leqslant t\leqslant b, a\leqslant s\leqslant b$ 上的实二元可测函数，满足

$$\int_a^b\int_a^b |K(t,s)|^q \mathrm{d}t\mathrm{d}s < \infty.$$

令

$$(Tx)(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)\mathrm{d}s$$

$$(x(t) \in \mathrm{L}^p[a,b], p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1),$$

可以证明 T 是 $\mathrm{L}^p[a,b]\to \mathrm{L}^q[a,b]$中的有界线性算子，故 T^* 是 $\mathrm{L}^p[a,b]\to \mathrm{L}^q[a,b]$中的有界线性算子．我们来求出 T^* 的具体形式．

对任一 $f\in (\mathrm{L}^q[a,b])^*$，存在 $y(t)\in \mathrm{L}^p[a,b]$，使

$$f(z) = \int_a^b z(t)y(t)\mathrm{d}t \quad (z(t) \in \mathrm{L}^q[a,b]).$$

故

$$\begin{aligned}(T^* f)(x) = f(Tx) &= \int_a^b y(t)[\int_a^b K(t,s)x(s)\mathrm{d}s]\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b x(s)[\int_a^b K(t,s)y(t)\mathrm{d}t]\mathrm{d}s \quad (x(t) \in \mathrm{L}^p[a,b].\end{aligned}$$

由于 $T^* f\in (\mathrm{L}^p[a,b])^* = \mathrm{L}^q[a,b]$，则

$$T^* f = \int_a^b K(t,s)y(t)\mathrm{d}t.$$

因 f 与 y 可视为同一，则

$$(T^* y)(s) = \int_a^b K(t,s)y(t)\mathrm{d}t,$$

或

$$(T^*y)(t) = \int_a^b K(s,t)y(s)\mathrm{d}s.$$

由此可见，T^* 是 $\mathrm{L}^p[a,b] \to \mathrm{L}^q[a,b]$ 以 $K_1(t,s)=K(s,t)$ 为核的积分算子．

§3 Banach 逆算子定理·闭图象定理·共鸣定理

在§2中，我们证明了定义在赋范线性空间 X 的任一子空间上的有界线性泛函必可保范延拓到整个空间 X 上(Hahn-Banach 定理)，这是泛函分析中的基本定理之一．在本节我们将介绍泛函分析中另外三个最基本的定理，即 Banach 逆算子定理、闭图象定理和共鸣定理．

3.1 逆算子和 Banach 逆算子定理

各种类型的方程，总可以归结为下面的一般形式

$$Tx = y. \tag{3.1}$$

这里算子 T 是由空间 $X \to$ 空间 Y 的一个映射，$y \in Y$ 是一已知元素，$x \in X$ 是未知元素．方程(3.1)对所有的 $y \in Y$ 存在唯一解 $x \in X$ 等价于逆算子 T^{-1} 存在，且值域 $\mathscr{R}(T)=Y$；方程(3.1)的解 x 连续依赖于 y 这一性质等价于 T^{-1} 是连续映射．本段将对 T 是线性算子的情形讨论上述问题，即讨论线性算子 T 的逆算子 T^{-1} 存在性和有界性以及如何求出 T^{-1}.

设 X,Y,Z 均为赋范线性空间，$T_1 \in \mathscr{B}(X,Y)$，$T_2 \in \mathscr{B}(Y,Z)$，规定算子 T_2,T_1 的积 T_2T_1 如下：

$$(T_2T_1)x = T_2(T_1x) \quad (x \in X).$$

特别地，若 $T \in \mathscr{B}(X)$，$T^2=TT$，$T^n=T^{n-1}T$，$T^0=I$. 设 T_1，$T_2,T_3 \in \mathscr{B}(X)$，则算子的乘法显然满足下列性质：

1° $(T_3T_2)T_1=T_3(T_2T_1)$，$(\alpha T_2)T_1=T_2(\alpha T_1)=\alpha T_2T_1$，

2° $T_3(T_1+T_2)=T_3T_1+T_3T_2$，$(T_1+T_2)T_3=T_1T_3+T_2T_3$，

3° $\|T_2T_1\| \leqslant \|T_2\| \cdot \|T_1\|$.

注意算子 T 的乘法不一定满足交换律，即 T_1T_2 不一定等于 T_2T_1.

例 1　在 C[0,1]中考察下面两个算子：

$$(T_1x)(t)=\int_0^t x(s)\mathrm{d}s,\ (T_2x)(t)=tx(t)\ (x(t)\in \mathrm{C}[0,1]).$$

显然 T_1,T_2 都是从 C[0,1]到其自身的有界线性算子．易知

$$(T_2T_1x)(t)=t\int_0^t x(s)\mathrm{d}s,(T_1T_2x)(t)=\int_0^t sx(s)\mathrm{d}s.$$

若取 $x_0(t)\equiv 1\ (t\in[0,1])$，则

$$(T_2T_1x_0)(t)=t^2,\ (T_1T_2x_0)(t)=\frac{t^2}{2},$$

因此 $T_2T_1x_0\neq T_1T_2x_0$，故 $T_1T_2\neq T_2T_1$.

设 X,Y 是赋范线性空间，T 是 X 到 Y 中的线性算子，其定义域和值域分别用 $\mathscr{D}(T)$和 $\mathscr{R}(T)$表示．

定义 3.1　设 T 是 $\mathscr{D}(T)\subset X$ 到 Y 中的线性算子，如果 T 是 $\mathscr{D}(T)$到 $\mathscr{R}(T)$上的一对一映射，则称 T 是 $\mathscr{D}(T)$到 $\mathscr{R}(T)$上的**可逆算子**，其逆算子 T^{-1}必存在，T^{-1}是由 $\mathscr{R}(T)$到 $\mathscr{D}(T)$的线性算子．

显然，若 T^{-1}存在，则 $Tx=y$，等价于 $x=T^{-1}y$. 又若 $\mathscr{D}(T)=X$，$\mathscr{R}(T)=Y$，且 T 可逆，则

$$TT^{-1}=I_Y,\ T^{-1}T=I_X.$$

其中 I_X,I_Y 分别表示 X 和 Y 中的恒等算子．

引理　设 T 是 $X\to Y$ 中的线性算子，则 T 是 X 到 Y 上的可逆算子的充要条件是存在线性算子 $S:Y\to X$，使

$$ST=I_X,\quad TS=I_Y, \tag{3.2}$$

此时，$T^{-1}=S$.

证　只需证明充分性．由 $ST=I_X$ 可知当 $x\neq 0$，$Tx\neq 0$，故 T 是 $X\to\mathscr{R}(T)$上的一对一映射，再由 $TS=I_Y$ 知 $\mathscr{R}(T)=Y$，故 T

是 $X \to Y$ 上的可逆算子，存在 $T^{-1}: Y \to X$. 利用 $T^{-1}(TS) = T^{-1}I_Y = T^{-1}$ 以及 $T^{-1}T = I_X$ 立即得 $T^{-1} = S$.

我们也称满足 $ST = I_X$ 的算子 S 为 T 的左逆，满足 $TS = I_Y$ 的算子 S 为 T 的右逆．实际上可以证明：若 T 的左逆、右逆存在，则左逆和右逆必相等．

定理 3.1 设 X, Y, Z 都是赋范线性空间，$T_1 \in \mathscr{B}(X, Y)$，$T_2 \in \mathscr{B}(Y, Z)$，$T_1, T_2$ 均可逆，且 $T_1^{-1} \in \mathscr{B}(Y, X)$，$T_2^{-1} \in \mathscr{B}(Z, Y)$，则

(1) T_1^* 可逆，$(T_1^*)^{-1}\mathscr{B}(X^*, Y^*)$，且 $(T_1^*)^{-1} = (T_1^{-1})^*$，

(2) T_2T_1 是 $X \to Z$ 上的可逆算子，且 $(T_2T_1)^{-1} = T_1^{-1}T_2^{-1}$.

证 (1) 首先显然有 $(I_X)^* = I_{X^*}$，$(I_Y)^* = I_{Y^*}$. 因为

$$(T_1^*)(T_1^{-1})^* = (T_1^{-1}T_1)^* = (I_X)^* = I_{X^*},$$

$$(T_1^{-1})^*(T_1^*) = (T_1T_1^{-1})^* = (I_Y)^* = I_{Y^*},$$

由引理知，T_1^* 是 Y^* 到 X^* 上的可逆算子，且

$$(T_1^*)^{-1} = (T_1^{-1})^* \in \mathscr{B}(X^*, Y^*).$$

(2) 由条件

$$(T_1^{-1}T_2^{-1})(T_2T_1) = I_X,\ (T_2T_1)(T_1^{-1}T_2^{-1}) = I_Z,$$

所以 $(T_2T_1)^{-1} = (T_1^{-1}T_2^{-1}) \in \mathscr{B}(Z, X)$.

定理 3.2 设 X 为赋范线性空间，$T \in \mathscr{B}(X)$，则 $T^{-1}: \mathscr{R}(T) \to X$ 存在有界的充要条件是：存在 $\alpha > 0$，使

$$\| Tx \| \geqslant \alpha \| x \| \quad (\forall\, x \in X). \tag{3.3}$$

证 必要性：设 T^{-1} 有界，令 $y = Tx$，则

$$\| x \| = \| T^{-1}y \| \leqslant \| T^{-1} \| \cdot \| y \|.$$

故

$$\| Tx \| \geqslant \frac{1}{\| T^{-1} \|} \| x \| \quad (x \in X).$$

充分性：设(3.3)成立．首先由不等式(3.3)知 T 是一对一映射．又因为 $y = Tx$ 等价于 $x = T^{-1}y$，故

$$\| y \| \geqslant \alpha \| T^{-1}y \|,$$

$$\| T^{-1}y \| \leqslant \frac{1}{\alpha} \| y \| \quad (\forall\, y \in \mathscr{R}(T) = \mathscr{D}(T^{-1})),$$

从而 T^{-1}有界，且 $\| T^{-1} \| \leqslant \frac{1}{\alpha}$.

定理 3.3 设 X 为 Banach 空间，$T\in\mathscr{B}(X)$，且 $\| T \| <1$，则 $(I-T)^{-1}$存在，且$(I-T)^{-1}\in\mathscr{B}(X)$以及

$$\| (I-T)^{-1} \| \leqslant \frac{1}{1-\| T \|}.$$

证 由于 $\| T^n \| \leqslant \| T \|^n$ 以及 $\| T \| <1$. 如果记

$$A_n = I + T + T^2 + \cdots + T^n,$$

则 A_n 在 $\mathscr{B}(X)$中收敛，记 $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} T^n$. 因为 $\mathscr{B}(X)$完备，所以 $A\in\mathscr{B}(X)$. 容易算出

$$A_n(I-T) = (I-T)A_n = I - T^{n+1},$$

注意到 T^{n+1}按算子范数收敛于 0，上式中令 $n\to\infty$，得

$$A(I-T) = (I-T)A = I.$$

由引理，$(I-T)^{-1} = A = \sum\limits_{n=0}^{\infty} T^n \in \mathscr{B}(X)$，且

$$\| (I-T)^{-1} \| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \| T^n \| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \| T \|^n = \frac{1}{1-\| T \|}.$$

推论 设 X 为 Banach 空间，$T\in\mathscr{B}(X)$，可逆，且 $T^{-1}\in\mathscr{B}(X)$，则对任何 $\Delta T\in\mathscr{B}(X)$，当 $\| \Delta T \| < \| T^{-1} \|^{-1}$时，算子 $S=T+\Delta T$ 可逆，且 $S^{-1}\in\mathscr{B}(X)$以及

$$S^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-T^{-1}\Delta T)^n T^{-1}.$$

证 因为 $S=T+\Delta T=T(I+T^{-1}\Delta T)$，且 $\| T^{-1}\Delta T \| \leqslant \| T^{-1} \| \cdot \| \Delta T \| <1$，故由定理 3.3 知$(I+T^{-1}\Delta T)^{-1}\in\mathscr{B}(X)$，从而 $S^{-1}=(I+T^{-1}\Delta T)^{-1}T^{-1}\in\mathscr{B}(X)$，且

$$S^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-T^{-1}\Delta T)^n T^{-1}.$$

定理 3.4 (Banach 逆算子定理) 设 X，Y 是 Banach 空间，

$T\in\mathscr{B}(X,Y)$，如果 T 是 X 到 Y 上的一对一映射，则 $T^{-1}\in\mathscr{B}(Y,X)$.

证 本定理的证明比较复杂，我们把它分成三步来叙述.

(1) 令 $O_n=\{x\in X: \|x\|\leqslant n\}$，$M_n=T(O_n)$，$n=1,2,3,\cdots$. 则 $X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}O_n$，$Y=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}M_n$，因为 Y 完备，则由 Baire 纲定理(见第十一章§1 定理 1.10)，必有某个 $M_{n_0}=T(O_{n_0})$ 在 Y 的某个闭球 $\tilde{S}(y_0,r_0)=\{y\in Y: \|y-y_0\|\leqslant r_0\}$ 中稠密.

(2) 令 $\delta_0=\dfrac{r_0}{n_0}$，则可以证明 $M_1=T(O_1)$ 在 Y 中的闭球 $\tilde{S}(0,\delta_0)=\{y\in Y: \|y\|\leqslant\delta_0\}$ 中稠密.

事实上，任取 $y\in\tilde{S}(0,\delta_0)$，则 $y_0+n_0y, y_0-n_0y\in\tilde{S}(y_0,r_0)$，按照第一步所证，必存在 On_0 中点到 $\{x_k\}$ 和 $\{x'_k\}$，使

$$\lim_{k\to\infty}Tx_k=y_0+n_0y,\quad \lim_{k\to\infty}Tx'_k=y_0-n_0y,$$

于是

$$\lim_{k\to\infty}T(x_k-x'_k)=2n_0y,$$

即

$$\lim_{k\to\infty}T\left(\frac{x_k-x_k'}{2n_0}\right)=y.$$

但是 $\dfrac{x_k-x_k'}{2n_0}\in O_1$，所以 $T(O_1)$ 在 $\tilde{S}(0,\delta_0)$ 中稠密.

(3) 证明 $T(O_1)\supset\tilde{S}\left(0,\dfrac{\delta_0}{2}\right)$，从而可得 T^{-1} 有界，且 $\|T^{-1}\|\leqslant\dfrac{2}{\delta_0}$.

因为 $T(O_1)$ 在 $\tilde{S}(0,\delta_0)$ 中稠密，若记 $O_{\frac{1}{2^n}}=\{x\in X: \|x\|\leqslant\frac{1}{2^n}\}$，则容易证明 $T\left(O_{\frac{1}{2^n}}\right)$ 在 $\tilde{S}\left(0,\dfrac{\delta_0}{2^n}\right)$ 中稠密. 任取 $y\in\tilde{S}\left(0,\dfrac{\delta_0}{2}\right)$，存在 $x_1\in O_{\frac{1}{2}}$，使

$$\|y-Tx_1\|\leqslant\frac{\delta_0}{2^2},$$

即 $y-Tx_1\in\widetilde{S}\left(0,\frac{\delta_0}{2^2}\right)$，又因为 $T\left(O_{\frac{1}{2^2}}\right)$ 在 $\widetilde{S}\left(0,\frac{\delta_0}{2^2}\right)$ 中稠密，故存在 $x_2\in O_{\frac{1}{2^2}}$，使

$$\| y-Tx_1-Tx_2\| \leqslant \frac{\delta_0}{2^3}.$$

由归纳法，可得到点列 $\{x_n\}\subset X$，$x_n\in O_{\frac{1}{2^n}}$，使

$$\| y-T(x_1+x_2+\cdots+x_n)\| \leqslant \frac{\delta_0}{2^{n+1}}. \tag{3.4}$$

由于 X 完备以及 $\| x_n\| \leqslant\frac{1}{2^n}(n=1,2,3,\cdots)$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 在 X 中收敛，令 $x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$，$\| x\| \leqslant\sum\limits_{n=1}^{\infty}\| x_n\| \leqslant 1$，故 $x\in O_1$. 在(3.4)式中令 $n\to\infty$，利用 T 的连续性可得 $y=Tx$，这就证明了 $T(O_1)\supset\widetilde{S}\left(0,\frac{\delta_0}{2}\right)$. 又因为 T 是一对一的，所以 $O_1\supset T^{-1}\widetilde{S}\left(0,\frac{\delta_0}{2}\right)$. 任取 $y\in Y$，$y\neq0$，则 $\frac{\delta_0 y}{2\| y\|}\in\widetilde{S}\left(0,\frac{\delta_0}{2}\right)$，故

$$\left\| T^{-1}\left(\frac{\delta_0 y}{2\| y\|}\right)\right\| \leqslant 1,$$

即

$$\| T^{-1}y\| \leqslant \frac{2}{\delta_0}\| y\| \quad (y\in Y),$$

于是 T^{-1} 有界，且 $\| T^{-1}\| \leqslant\frac{2}{\delta_0}$.

定义 3.2 设 $\|\cdot\|_1$，$\|\cdot\|_2$ 是线性空间 X 上的两个范数，如果存在正数 K_1，K_2，使得对一切 $x\in X$，有

$$K_1\| x\|_1\leqslant\| x\|_2\leqslant K_2\| x\|_1,$$

则称 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 等价.

推论 设线性空间 X 上的两个范数 $\|\cdot\|_1$，$\|\cdot\|_2$ 均使 X 成为 Banach 空间，如果存在正数 K，使得对一切 $x\in X$ 成立

$$\| x\|_2\leqslant K\| x\|_1,$$

则$\|\cdot\|_1$和$\|\cdot\|_2$等价.

证 将X按$\|\cdot\|_1$和$\|\cdot\|_2$所成的Banach空间分别记为X_1和X_2，即$X_1=(X,\|\cdot\|_1)$，$X_2=(X,\|\cdot\|_2)$. 考察X上的恒同算子$I:(X,\|\cdot\|_1)\to(X,\|\cdot\|_2)$，则$I$是$X_1$到$X_2$上的一对一算子. 由条件

$$\|x\|_2=\|Ix\|_2\leqslant K\|x\|_1,$$

故$I\in\mathscr{B}(X_1,X_2)$，据Banach逆算子定理I^{-1}有界，故存在$K'>0$，使

$$\|I^{-1}x\|_1\leqslant K'\|x\|_2.$$

即

$$\|x\|_1\leqslant K'\|x\|_2.$$

故$\|\cdot\|_1$和$\|\cdot\|_2$等价.

例2 设$P_1(t),P_2(t),\cdots,P_n(t)\in C[a,b]$，考察$k$阶线性微分方程

$$\begin{cases}x^{(k)}(t)+p_1(t)x^{(k-1)}(t)+\cdots+p_k(t)x(t)=y(t)\\ x(a)=x'(a)=\cdots=x^{(k-1)}(a)=0.\end{cases}\tag{3.5}$$

由常微分方程的知识可知，对任何$y(t)\in C[a,b]$，方程(3.5)均存在唯一的k阶连续可微解$x(t)$. 试证明：方程(3.5)之解$x(t)$连续依赖于函数$y(t)$.

证 $C^{(k)}[a,b]$表示定义在$[a,b]$上有k阶连续导数的函数全体，$x\in C^{(k)}[a,b]$，

$$\|x\|=\sum_{j=0}^{k}\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x^{(j)}(t)|.$$

令

$$X=C_0^{(k)}[a,b]=\{x:x\in C^{(k)}[a,b],\\ x(a)=x'(a)=\cdots=x^{(k-1)}(a)=0\}.$$

我们知道$C^{(k)}[a,b]$是一个Banach空间，$C_0^{(k)}[a,b]$是$C^{(k)}[a,b]$的一个闭线性子空间，故也是一个Banach空间. 作算子$T:X\to Y=C[a,b]$：

$$Tx = x^{(k)} + p_1 x^{(k-1)} + \cdots + p_k x.$$

因为

$$\begin{aligned}\| Tx \| &= \max_{a \leqslant t \leqslant b} |(Tx)(t)| \\ &\leqslant (1 + \sum_{i=1}^{k} \max_{t} |p_i(t)|)(\sum_{j=0}^{k} \max_{t} |x^{(j)}(t)|) \\ &\leqslant M \cdot \| x \|,\end{aligned}$$

其中 $M = 1 + \sum_{i=1}^{k} \max_{t} |p_i(t)|$，故 $T \in \mathscr{B}(X,Y)$.

由于对任何 $y \in Y$，方程(3.5)有唯一的 k 阶连续可微解 x，因而 T 是 X 到 Y 上的一对一映射．由 Banach 逆算子定理，T^{-1}是$C[a,b]$到$C_0^{(k)}[a,b]$的连续线性算子，故当 $y \in C[a,b]$作微小变动时，相应的微分方程(3.5)的解 $x = T^{-1}y$ 也必然作微小变动，即解函数 $x(t)$及其导数 $x'(t), x''(t), \cdots, x^{(k)}(t)$均一致地作微小变动．

3.2 闭线性算子和闭图象定理

设 X,Y 是赋范线性空间，则乘积空间 $X \times Y = \{(x,y): x \in X, y \in Y\}$，在乘积空间 $X \times Y$ 中定义范数如下：

$$\| (x,y) \| = \| x \| + \| y \|,$$

读者容易证明它是 $X \times Y$ 上的一个范数，而且如果 X,Y 均完备，则 $X \times Y$ 也完备．

定义 3.3 设 X,Y 为赋范线性空间，$T: \mathscr{D}(T) \subset X \to Y$ 中的线性算子，则称 $X \times Y$ 中的子集

$$G(T) = \{(x,Tx): x \in \mathscr{D}(T)\}$$

为 T 的**图象**．如果 $G(T)$是 $X \times Y$ 中的一个闭子空间，则称 T 为**闭线性算子**．

下面的定理给出了闭算子的一个等价条件，利用这个条件来检验线性算子是否为闭算子往往比较简单．

定理 3.5 设 X,Y 是赋范线性空间，T 是$\mathscr{D}(T) \subset X$ 到 Y 中的线性算子，则 T 为闭算子的充要条件是：对任意的 $\{x_n\} \subset$

$\mathscr{D}(T)$，若 $x_n \to x, Tx_n \to y$，则有 $x \in \mathscr{D}(T)$，且 $y = Tx$.

证 充分性：任取 $(x,y) \in \overline{G(T)}$，则存在 $\{x_n\} \subset \mathscr{D}(T)$，使

$$(x_n, Tx_n) \to (x,y) \ (\text{在 } X \times Y \text{ 中}),$$

于是 $x_n \to x, Tx_n \to y \ (n \to \infty)$. 由假设 $x \in \mathscr{D}(T)$，且 $y = Tx$，故 $(x, y) \in G(T)$，即 $G(T)$ 为 $X \times Y$ 中的闭子空间，T 为闭线性算子.

必要性：设 T 为闭算子，即 $G(T)$ 为 $X \times Y$ 中的闭子空间，任取 $\{x_n\} \subset \mathscr{D}(T)$，满足 $x_n \to x, Tx_n \to y$，其中 $x \in X, y \in Y$，则 $(x_n, Tx_n) \to (x,y)$，故 $(x,y) \in \overline{G(T)} = G(T)$，即 $x \in \mathscr{D}(T)$，且 $y = Tx$.

定理 3.6 （闭图象定理） 设 X, Y 是 Banach 空间，T 是 $\mathscr{D}(T) \subset X$ 到 Y 中的线性算子，如果 $\mathscr{D}(T)$ 是 X 中的闭子空间，则 T 是闭算子的充要条件是 T 为有界线性算子. 特别地，当 $\mathscr{D}(T) = X$ 时，T 是闭线性算子等价于 T 是有界线性算子.

证 必要性：设 $\mathscr{D}(T)$ 闭，$T: \mathscr{D}(T) \to Y$ 是闭线性算子. 因为 X 完备，故 $\mathscr{D}(T)$ 本身可看作一 Banach 空间，又因为 $G(T)$ 是闭子空间，$X \times Y$ 是 Banach 空间，所以 $G(T)$ 也是 Banach 空间. 在 $G(T)$ 上定义算子 $\tilde{T}$ 如下：

$$\tilde{T}: (x, Tx) \to x,$$

则 $\tilde{T}$ 是 $G(T)$ 到 $\mathscr{D}(T)$ 上的一对一线性算子. 我们证明 $\tilde{T}$ 有界. 事实上，因为

$$\|\tilde{T}(x, Tx)\| = \|x\| \leqslant \|x\| + \|Tx\| = \|(x, Tx)\|,$$

所以 $\|\tilde{T}\| \leqslant 1$，则由 Banach 逆算子定理，$\tilde{T}^{-1}$ 有界，从而对一切 $x \in \mathscr{D}(T)$，

$$\|\tilde{T}^{-1} x\| \leqslant \|\tilde{T}^{-1}\| \cdot \|x\|.$$

即

$$\|(x, Tx)\| \leqslant \|\tilde{T}^{-1}\| \cdot \|x\|.$$

于是

$$\|Tx\| \leqslant \|\tilde{T}^{-1}\| \cdot \|x\| \quad (\forall\, x \in \mathscr{D}(T)),$$

故 T 是有界线性算子.

充分性：设 T 是有界线性算子，利用 $\mathscr{D}(T)$ 的闭性以及定理

3.5(闭算子的等价定义),容易证明 T 是闭线性算子.

闭图象定理的重要性在于证明线性算子 T 的有界性可以化为证明 T 的闭性,这在不少情况下是比较方便的.特别是用泛函分析方法研究偏微分方程时,由于对于偏微分算子直接验证它的连续性比较困难,于是人们往往先来证明某些偏微分算子是闭算子.

例 3 设 $X=\mathrm{C}[a,b]$,考察 X 中的微分算子 $T=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$,$\mathscr{D}(T)=C^1[a,b]\subset \mathrm{C}[a,b]$. 在本章§1 例 5 中已指出 T 是无界线性算子,下面证明 T 是闭算子.

设 $\{x_n(t)\}\subset \mathrm{C}^1[a,b]$,$x_n\to x$,$Tx_n\to y$,即 $x_n(t)\Rightarrow x(t)$,$x'_n(t)\Rightarrow y(t)$,由数学分析可知,$x(t)$ 连续可微,且 $x'(t)=y(t)$,即 $x\in\mathscr{D}(T)$,且 $Tx=y$,故 T 是闭算子.

利用本例也可以说明闭图象定理中条件 X,Y 完备性不可少.因为,如果令 $X=\mathrm{C}^1[a,b]$,取范数 $\|x\|=\max|x(t)|$,容易证明按照这个范数 X 不完备,$Y=\mathrm{C}[a,b]$. 现在 T 是 $X\to Y$ 中的闭线性算子,但 T 无界,这表明 X 不完备时,闭图象定理不一定成立.

例 4 设 $X=\mathrm{L}^2(-\infty,+\infty)$,$Tx(t)=tx(t)$,$\mathscr{D}(T)=\{x\in X:tx(t)\in \mathrm{L}^2(-\infty,+\infty)\}$,则 T 是闭算子.

证 设 $x_n(t)\in\mathscr{D}(T)$ $(n=1,2,3,\cdots)$,且 $x_n\to x$,$Tx_n\to y$(在 $\mathrm{L}^2(-\infty,+\infty)$ 中),则 $x(t),y(t)\in \mathrm{L}^2(-\infty,+\infty)$,我们只要证明 $x\in\mathscr{D}(T)$,$Tx=y$.

因为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x_n(t)-x(t)|^2\mathrm{d}t\to 0\ (n\to\infty),$$

以及

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|tx_n(t)-y(t)|^2\mathrm{d}t\to 0\ (n\to\infty),$$

则必存在子序列 $\{x_{n_k}(t)\}$,使

$$x_{n_k}(t) \xrightarrow{\text{a.e.}} x(t), tx_{n_k}(t) \xrightarrow{\text{a.e.}} y(t).$$

故 $tx(t) \overset{\text{a.e.}}{=\!=\!=} y(t), tx(t) \in L^2-\infty, +\infty)$，从而 $x(t) \in \mathscr{D}(T), Tx = y$.

3.3 共鸣定理及其应用

在分析数学的许多领域中，人们常常遇到的不只是单个有界线性算子，而往往是一族线性有界算子，并且需要讨论这一族有界线性算子是否一致有界．从 19 世纪开始，人们在若干不同的领域处理了这类问题的特殊情形，例如对傅立叶级数的研究，对级数求和法的研究，对插值问题以及关于求和法与奇异积分的研究等，都发现了同类的结果。1927 年巴拿赫与斯坦因豪斯(H. Steinhaus)分析了上述的大量成果，提出了一个一般性的定理，这就是下面的共鸣定理．

定理 3.7 （共鸣定理）设 X 是 Banach 空间，Y 是赋范线性空间，$\{T_\alpha\}_{\alpha \in \mathscr{A}} \subset \mathscr{B}(X, Y)$. 如果对每个 $x \in X$.

$$\sup_{\alpha \in \mathscr{A}} \| T_\alpha x \| < \infty, \tag{3.6}$$

则必有

$$\sup_{\alpha \in \mathscr{A}} \| T_\alpha \| < \infty. \tag{3.7}$$

证 令 $p(x) = \sup_{\alpha \in \mathscr{A}} \| T_\alpha x \|$，则 $p(x)$ 是定义在 X 上的泛函数，它显然满足：

$$p(x) \geqslant 0, p(cx) = |c| p(x) \quad (c \in K),$$

以及

$$p(x + y) \leqslant p(x) + p(y).$$

对任一自然数 k，令

$$M_k = \{x \in X : p(x) \leqslant k\},$$

则可以证明每个 M_k 是 X 中的闭集．事实上，因为

$$M_k = \bigcap_{\alpha \in \mathscr{A}} \{x \in X : \| T_\alpha x \| \leqslant k\},$$

每个 T_α 连续，故 $\{x\in X:\|T_\alpha x\|\leqslant k\}$ 是 X 中的闭集，从而 M_k 是 X 中的闭集.

由条件(3.6)，$X=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}M_k$，因为 X 完备，据 Baire 纲定理，必存在 M_{k_0} 在 X 的某个闭球
$\widetilde{S}(x_0,r_0)=\{x\in X:\|x-x_0\|\leqslant r_0\}$ 中稠密. 因为 M_{k_0} 是闭集，故

$$M_{k_0}\supset\widetilde{S}(x_0,r_0).$$

下面证明 $p(x)\leqslant\dfrac{k_0}{r_0}\|x\|$，从而 $\|T_\alpha\|\leqslant\dfrac{k_0}{r_0}\quad(\forall\ \alpha\in\mathscr{A})$.
任取 $x\in X,x\neq0$，则 $x_0+\dfrac{r_0x}{\|x\|},x_0-\dfrac{r_0x}{\|x\|}\in\widetilde{S}(x_0,r_0)\subset M_{k_0}$，所以

$$p(x_0+\frac{r_0x}{\|x\|})\leqslant k_0,\ p(x_0-\frac{r_0x}{\|x\|})\leqslant k_0,$$

由于

$$p(x_0-\frac{r_0x}{\|x\|})=p(\frac{r_0x}{\|x\|}-x_0),$$

所以

$$\begin{aligned}p(\frac{2r_0x}{\|x\|})&=p(\frac{r_0x}{\|x\|}+x_0+\frac{r_0x}{\|x\|}-x_0)\\&\leqslant p(\frac{r_0x}{\|x\|}+x_0)+p(\frac{r_0x}{\|x\|}-x_0)\leqslant 2k_0.\end{aligned}$$

故

$$p(x)\leqslant\frac{k_0}{r_0}\|x\|,$$

$$\sup_{\alpha\in\mathscr{A}}\|T_\alpha\|\leqslant\frac{k_0}{r_0}.$$

共鸣定理告诉我们，由 $\{T_\alpha x\}$ 对每个 $x\in X$ 的有界性可推出 $\{\|T_\alpha\|\}$ 的一致有界性，故也称为**一致有界原理**.

在本章 §1 中已介绍了 $\mathscr{B}(X,Y)$ 中算子序列 $\{T_n\}$ 的强收敛概念，下面我们利用共鸣定理来研究算子序列强收敛的三个问题：

1° 强收敛算子序列 $\{T_n\}$，$\{\|T_n\|\}$ 是否有界？

2° 算子序列$\{T_n\}$满足什么条件时强收敛?

3° $\mathscr{B}(X,Y)$在算子列强收敛意义下是否完备?

利用共鸣定理立即可得出第一个问题的答案,这就是下面的推论.

推论 设 X 为 Banach 空间,Y 是赋范线性空间,$T,T_n\in\mathscr{B}(X,Y)\ (n=1,2,3,\cdots)$,如果$\{T_n\}$强收敛于 T,则$\{\|T_n\|\}$有界.

证 由假设,对每个 $x\in X$,$T_nx\to Tx$,故$\{T_nx\}$有界,据共鸣定理,$\{\|T_n\|\}$必有界.

定理 3.8 设 X 是赋范线性空间,Y 是 Banach 空间,$T_n\in\mathscr{B}(X,Y)\ (n=1,2,3,\cdots)$,如果下面两个条件成立:

(1) $\{\|T_n\|\}$有界,

(2) 存在 X 的一个稠密子集 G,使 $x\in G$ 时,$\{T_nx\}$收敛,则存在 $T\in\mathscr{B}(X,Y)$,使$\{T_n\}$强收敛于 T,且

$$\|T\|\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\|T_n\|. \tag{3.8}$$

证 设$\|T_n\|\leqslant M\ (n=1,2,3,\cdots)$,因为 $\overline{G}=X$,任取 $x\in X$,对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $y\in G$,使

$$\|x-y\|\leqslant\frac{\varepsilon}{3M}.$$

由条件(2),$\{T_ny\}$收敛,故存在自然数 N,使对一切 $n>N$ 以及任意的自然数 k,有

$$\|T_{n+k}y-T_ny\|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

于是

$$\begin{aligned}\|T_{n+k}x-T_nx\|\leqslant&\|T_{n+k}x-T_{n+k}y\|\\&+\|T_{n+k}y-T_ny\|+\|T_ny-T_nx\|\\<&M\cdot\frac{\varepsilon}{3M}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.\end{aligned}$$

故$\{T_nx\}$是完备空间 Y 中的基本列,$\{T_nx\}$必收敛于 Y 中某一元

素．令

$$Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x \ (x \in X),$$

则 T 是 X 到 Y 中的线性算子，再由

$$\|Tx\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\| = \varliminf_{n\to\infty} \|T_n x\| \leqslant (\varliminf_{n\to\infty} \|T_n\|) \cdot \|x\|.$$

可知 $T \in \mathscr{B}(X,Y)$，且

$$\|T\| \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \|T_n\|.$$

在 §1 中我们已经证明了当 Y 完备时，$\mathscr{B}(X,Y)$ 依算子序列的一致收敛是完备的，下面将证明当 X,Y 均完备时，$\mathscr{B}(X,Y)$ 关于算子列的强收敛也是完备的．

定理 3.9 设 X,Y 都是 Banach 空间，则 $\mathscr{B}(X,Y)$ 在算子列强收敛意下完备．

证 设 $\{T_n\} \subset \mathscr{B}(X,Y)$，对每个 $x \in X$，$\{T_n x\}$ 是 Y 中的基本列，我们要证明 $\{T_n\}$ 强收敛于某一有界线性算子．

因为 $\{T_n x\}$ 是基本列，故对每个 $x \in X$，$\{\|T_n x\|\}$ 有界，按共鸣定理，$\{\|T_n\|\}$ 有界．又因为 Y 完备，故 $\{T_n x\}$ 对每个 $x \in X$ 收敛，于是 $\{T_n\}$ 满足定理 3.8 中条件(1)，(2)，所以存在 $T \in \mathscr{B}(X,Y)$，使 $\{T_n\}$ 强收敛于 T．

下面介绍几个共鸣定理应用的实例．

例 5 （傅立叶级数的发散问题） 设 $C_{2\pi}$ 为周期是 2π 的连续函数全体，则对任一点 $t_0 \in [-\pi,\pi]$，存在 $x(t) \in C_{2\pi}$，使 $x(t)$ 的傅立叶级数在 t_0 处是发散的．

证 $x(t) \in C_{2\pi}$，令 $\|x\| = \max\limits_{-\infty<t<+\infty} |x(t)|$，则 $C_{2\pi}$ 是一个 Banach 空间．$x(t)$ 的傅立叶级数为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt), \tag{3.9}$$

其中

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(s)\cos ks\,ds \quad (k = 0,1,2,\cdots),$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(s)\sin ks\mathrm{d}s \quad (k = 1,2,3,\cdots).$$

不失一般性，令 $t_0=0$. 当 $t=0$ 时，级数(3.9)的部分和为

$$S_n(0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(s)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos ks\right]\mathrm{d}s.$$

定义 $f_n \in C_{2\pi}^*$ 如下：

$$f_n(x) = S_n(0) = \int_{-\pi}^{\pi} x(s)K_n(s)\mathrm{d}s, \tag{3.10}$$

其中

$$K_n(s) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos ks\right] = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)s}{2\pi\sin\frac{s}{2}},$$

因为 $K_n(s)$ 是连续函数，则 f_n 是 $C_{2\pi}$ 上的有界线性泛函，且

$$\| f_n \| \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |K_n(s)|\mathrm{d}s.$$

我们可以类似于本章 §1 例 3 证明

$$\| f_n \| = \int_{-\pi}^{\pi} |K_n(s)|\mathrm{d}s.$$

但是

$$\begin{aligned}
\| f_n \| &= \int_{-\pi}^{\pi} |K_n(s)|\mathrm{d}s = 2\int_{0}^{\pi} |K_n(s)|\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{\left|\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)s\right|}{\left|\sin\frac{s}{2}\right|}\mathrm{d}s \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(2n+1)t|}{|\sin t|}\mathrm{d}t \\
&\geqslant \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(2n+1)t|}{t}\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{|\sin u|}{u}\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

由数学分析知

$$\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{|\sin u|}{u} \mathrm{d}u \to \infty \ (n \to \infty),$$

故

$$\| f_n \| \to \infty \ (n \to \infty).$$

则由共鸣定理知，必存在 $x_0(t) \in C_{2\pi}$，使 $\{f_n(x_0)\}$ 发散，即 $x_0(t)$ 的傅立叶级数在 $t=0$ 处发散．

例 5 说明 $C_{2\pi}$ 中函数的傅立叶级数不一定处处收敛，我们这里的证明并非构造性的，而是用泛函分析的观点与方法给出的一个纯粹存在性的证明，它远比早期讨论傅立叶级数发散问题所用的构造性方法简单，这充分体现了泛函分析抽象概念的特点．

例 6 （机械求积公式的收敛性问题）

在定积分 $\int_0^1 x(t)\mathrm{d}t$ 的近似计算中，常常使用下面的**机械求积公式**．

$$\sum_{k=0}^{n} x(t_k^{(n)}) A_k^{(n)} \approx \int_0^1 x(t)\mathrm{d}t, \tag{3.11}$$

其中 $0 \leqslant t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \cdots < t_n^{(n)} \leqslant 1$，$A_k^{(n)}(k=0,1,2,\cdots,n)$ 选择如下：

使得(3.11)对一切次数 $\leqslant n$ 的多项式精确成立（事实上只需对 $1,t,t^2,\cdots,t^n$ 成立即可）．显然可用待定系数法来确定这一组常数．我们的问题是：在什么样的条件下，

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x(t_k^{(n)}) A_k^{(n)} = \int_0^1 x(t)\mathrm{d}t \quad (\forall\ x(t) \in \mathrm{C}[0,1]). \tag{3.12}$$

利用共鸣定理及定理 3.8 可以证明(3.12)成立的充要条件是：存在常数 $M>0$，使得

$$\sum_{k=0}^{n} |A_k^{(n)}| \leqslant M \ (n \in N). \tag{3.13}$$

证 作 $f_n \in \mathrm{C}^*[0,1]$ 如下：

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x(t_k^{(n)}) A_k^{(n)} \quad (x(t) \in \mathrm{C}[0,1]).$$

首先证明

$$\| f_n \| = \sum_{k=0}^{n} |A_k^{(n)}|.$$

事实上，

$$|f_n(x)| \leqslant \| x \| \sum_{k=0}^{n} |A_k^{(n)}|,$$

所以

$$\| f_n \| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |A_k^{(n)}|.$$

另一方面，对每个 n，可取 $x_n(t) \in C[0,1]$，使 $\| x_n \| = 1$，且

$$x_n(t_k^{(n)}) = \operatorname{sgn} A_k^{(n)}, k = 0,1,2,\cdots,n.$$

于是

$$\| f_n \| \geqslant |f_n(x_n)| = \sum_{k=0}^{n} |A_k^{(n)}|,$$

故

$$\| f_n \| = \sum_{k=0}^{n} |A_k^{(n)}|.$$

如果(3.12)成立，则由共鸣定理知

$$\sup_n \sum_{k=0}^{n} |A_k^{(n)}| = \sup_n \| f_n \| < \infty.$$

反之，如果(3.13)成立，由于对每个多项式 $p(t)$，只要取 n 大于 $p(t)$ 的次数，就有

$$f_n(p) = \sum_{k=0}^{n} p(t_k^{(n)}) A_k^{(n)} = \int_0^1 p(t) \mathrm{d}t,$$

故

$$f_n(p) \to \int_0^1 p(t) \mathrm{d}t \ (n \to \infty).$$

注意到 $\{p(t)\}$ 在 $C[0,1]$ 中稠密，则容易证明(3.12)成立.

例 7 设对任何 $x = (\xi_n) \in l$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \xi_n$ 均收敛，求证 $a = (a_n) \in l^{\infty}$.

证 令 $f_n(x)=\sum_{i=1}^{n}a_i\xi_i \quad (x=(\xi_i)\in l)$, $n=1,2,3,\cdots$,易知 $f_n\in l^*=l^\infty$,且 $\|f_n\|=\sup_{1\leqslant i\leqslant n}|a_i|$. 由条件 $\sum_{i=1}^{\infty}a_i\xi_i$ 对每个 $x=(\xi_i)\in l$ 收敛,立即可得

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\sum_{i=1}^{\infty}a_i\xi_i<\infty \ (\forall\ x=(\xi_i)\in l).$$

则对一切 $x\in l$,有

$$\sup_n|f_n(x)|<\infty.$$

按共鸣定理得

$$\sup_n\|f_n\|<\infty.$$

即

$$\sup_n|a_n|<\infty.$$

因此,$a=(a_n)\in l^\infty$.

例 8 设 $p>1$,$\alpha(t)$是有限区间$[a,b]$上的勒贝格可测函数,如果对任何 $x(t)\in \mathrm{L}^p[a,b]$,积分

$$\int_a^b x(t)\alpha(t)\mathrm{d}t$$

存在,则 $\alpha(t)\in \mathrm{L}^q[a,b]$,其中$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

证 作有界函数

$$\alpha_n(t)=\begin{cases}\alpha(t), & |\alpha(t)|\leqslant n,\\ 0, & |\alpha(t)|>n.\end{cases}$$

定义 $\mathrm{L}^p[a,b]$上的线性泛函

$$f_n(x)=\int_a^b x(t)\alpha_n(t)\mathrm{d}t \quad (x(t)\in \mathrm{L}^p[a,b]).$$

易知 $f_n\in(\mathrm{L}^p[a,b])^*$,且 $\|f_n\|=\|\alpha_n(t)\|_q=(\int_a^b|\alpha_n(t)|^q\mathrm{d}t)^{1/q}$. 由条件可知 $\alpha(t)\in \mathrm{L}[a,b]$,故 $\alpha_n(t)\xrightarrow{\text{a.e.}}\alpha(t)$ $(n\to\infty)$,又因为

$$|\alpha_n(t)x(t)| \leqslant |\alpha(t)x(t)| \in \mathrm{L}[a,b],$$

由勒贝格控制收敛定理立即知，对每个 $x(t)\in \mathrm{L}^p[a,b]$，有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \int_a^b x(t)\alpha(t)\mathrm{d}t < \infty.$$

故按共鸣定理可得

$$\sup_n \| f_n \| = \sup_n \left(\int_a^b |\alpha_n(t)|^q \mathrm{d}t\right)^{1/q} \leqslant M < \infty.$$

再由法杜定理，我们可得

$$\left(\int_a^b |\alpha(t)|^q \mathrm{d}t\right)^{1/q} \leqslant M$$

即 $\alpha(t)\in \mathrm{L}^q[a,b]$.

3.4 弱收敛

到目前为至，我们已讨论了下列几种收敛概念：对于赋范线性空间 X 中的点列 $\{x_n\}$，如果存在 $x\in X$，使 $\| x_n - x \| \to 0$，则称 $\{x_n\}$ 强收敛于 x；对于有界线性算子空间 $\mathscr{B}(X,Y)$ 中的算子序列 $\{T_n\}$，如果 $T\in \mathscr{B}(X,Y)$，$\| T_n - T \| \to 0$，则称 $\{T_n\}$ 一致收敛于 T；若对一切 $x\in X$，$\| T_n x - Tx \| \to 0$，则称 $\{T_n\}$ 强收敛于 T；对于共轭空间 X^*，如果 $f_n, f\in X^*$，且 $\| f_n - f \| \to 0$，则称 $\{f_n\}$ 在 Banach 空间 X^* 中强收敛于 f.

下面将定义 X 中的弱收敛概念和 X^* 中的 $*$ 弱收敛概念.

定义 3.4 设 X 是赋范线性空间.

(1) 设 $f_n, f_0\in X^*$ $(n=1,2,3,\cdots)$，如果对一切 $x\in X$，$f_n(x) \to f_0(x)$，则称 $\{f_n\}$ **$*$ 弱收敛**于 f_0，称 f_0 为 $\{f_n\}$ 的 **$*$ 弱极限**，记为 $f_n \xrightarrow{w^*} f_0$，

(2) 设 $x_n, x_0\in X$ $(n=1,2,3,\cdots)$，如果对一切 $f\in X^*$，$f(x_n) \to f(x_0)$，则称 $\{x_n\}$ **弱收敛**于 x_0，称 x_0 为 $\{x_n\}$ 的**弱极限**，记为 $x_n \xrightarrow{w} x_0$.

由 $*$ 弱收敛和弱收敛的定义可知下列性质成立：

1° $*$弱收敛(弱收敛)的极限是唯一的.

事实上,设 $f_n \xrightarrow{w^*} f_0$,又 $f_n \xrightarrow{w^*} f'_0$,则对一切 $x\in X$,有 $f_0(x)=f'_0(x)$,故 $f_0=f'_0$. 对于弱极限,若 $x_n \xrightarrow{w} x_0$,又 $x_n \xrightarrow{w} x'_0$,则对一切 $f\in X^*$,有 $f(x_0)=f(x'_0)$. 如果 $x_0\neq x'_0$,则据 Hahn-Banach 定理,存在 $f\in X^*$,使 $\|f\|=1, f(x_0-x'_0)=\|x_0-x'_0\|\neq 0$,矛盾,故 $x_0=x'_0$.

2° X^* 中强收敛(即依 X^* 中的范数收敛)蕴含 $*$弱收敛(X 中强收敛蕴含 X 中弱收敛). 反之,则不然.

这一结论证明比较简单,读者自己写出. 反之,我们举两个反例来说明.

例 9 设 $X=l^2, X^*=l^2, e_n\in l^2, e_n=(\underbrace{0,\cdots,0,1}_{n\text{位}},0,\cdots)$ $(n=1,2,3,\cdots)$. 任取 $f\in X^*$,存在 $\eta=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots)\in l^2$,使

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\eta_k \quad (x=(\xi_k)\in l^2),$$

于是 $f(e_n)=\eta_n\to 0\ (n\to\infty)$,所以 $e_n \xrightarrow{w} 0$,但 $\|e_n\|=1, n=1,2,3,\cdots$,故 $\{e_n\}$不强收敛于 0.

例 10 设 $X=L[0,2\pi]$,作 $f_n\in X^*(n=1,2,3,\cdots)$如下:

$$f_n(x)=\int_0^{2\pi}x(t)\sin nt\mathrm{d}t,\ x(t)\in L[0,2\pi].$$

则 $f_n \xrightarrow{w^*} 0$,但$\{f_n\}$不强收敛于 0.

证 由本章§2.2 可知 $\|f_n\|=\max\limits_{t\in[0,2\pi]}|\sin nt|=1$,所以$\{f_n\}$不强收敛于 0. 今证 $f_n \xrightarrow{w^*} 0(n\to\infty)$. 当 $x(t)\in C[0,2\pi]$时,

$$f_n(x)=\int_0^{2\pi}x(t)\sin nt\mathrm{d}t\to 0\ (n\to\infty),$$

再利用 $\|f_n\|=1$ 和 $C[0,2\pi]$在 $L[0,2\pi]$中稠密,立即得对一切 $x(t)\in L[0,2\pi]$,

$$f_n(x)\to 0\ (n\to\infty).$$

3° 设 X 为 Banach 空间，$\{f_n\}\subset X^*$，$f_n \xrightarrow{w^*} f_0\in X^*$，则 $\{\|f_n\|\}$ 有界（对于弱收敛，若 X 为赋范线性空间，$\{x_n\}\subset X$，$x_n \xrightarrow{w} x_0\in X$，则 $\{\|x_n\|\}$ 有界）.

证 如果记 $X^*=\mathscr{B}(X,K)$，将 f_n 看作 $X\to K$ 的算子序列，则 $f_n \xrightarrow{w^*} f_0$ 等价于 $\mathscr{B}(X,K)$ 中算子列 $\{f_n\}$ 强收敛于 f_0，由共鸣定理立即知 $\{\|f_n\|\}$ 有界．又设 X 中 $x_n \xrightarrow{w} x_0$，将 x_n 看作 X^{**} 中的元素，则 $x_n \xrightarrow{w} x_0$ 可看作 X^* 上的有界线性泛函序列 $\{x_n\}$ * 弱收敛于 x_0，X^* 完备，故 $\{\|x_n\|\}$ 有界.

类似于定理 3.8 我们有下面的结论.

定理 3.10 设 X 是赋范线性空间，$\{f_n\}\subset X^*$，如果满足条件

(1) $\{\|f_n\|\}$ 有界，

(2) 存在 X 的一个稠密子集 G，使对一切 $x\in G$，$\{f_n(x)\}$ 收敛，则存在 $f\in X^*$，使 $f_n \xrightarrow{w^*} f$.

定理 3.11 设 X 是可分的赋范线性空间，$\{f_n\}\subset X^*$，如果存在 $K>0$，使 $\|f_n\|\leqslant K(n=1,2,3,\cdots)$，则必存在子序列 $\{f_{n_k}\}$ * 弱收敛.

证 设 $\{x_k\}$ 是 X 中的可数稠子集．因为 $\|f_n\|\leqslant K$，则 $\{f_n(x_1)\}$ 是有界数列，必存在子序列 $\{f_n^{(1)}\}$，使 $\{f_n^{(1)}(x_1)\}$ 收敛．同理可从 $\{f_n^{(1)}\}$ 中取出子序列 $\{f_n^{(2)}\}$，使 $\{f_n^{(2)}(x_2)\}$ 收敛，依次类推，可得

$$\left.\begin{array}{cccc} f_1^{(1)}, & f_2^{(1)}, & f_3^{(1)}, & \cdots \\ f_1^{(2)}, & f_2^{(2)}, & f_3^{(2)}, & \cdots \\ \cdots & & \cdots & \\ f_1^{(n)}, & f_2^{(n)}, & f_3^{(n)}, & \cdots \\ \cdots & & \cdots & \end{array}\right\} \tag{3.14}$$

其中每一个序列是前一个序列的子序列，且对每个 $k\in N$，

$$f_1^{(k)}(x_k), f_2^{(k)}(x_k), \cdots, f_n^{(k)}(x_k), \cdots$$

收敛．取(3.14)对角线上的泛函组成的序列

$$f_1^{(1)}, f_2^{(2)}, \cdots, f_n^{(n)}, \cdots,$$

则对一切自然数 k，有 $\{f_n^{(n)}(x_k)\}$ 收敛．由于 $\{\|f_n^{(n)}\|\}$ 有界，$\{x_k\}$ 是 X 的稠密子集，则据定理 3.10，存在 $f \in X^*$，使 $f_n^{(n)} \xrightarrow{w^*} f$.

读者还可以证明下面的结论．

定理 3.12 设 X 为赋范线性空间，$\{x_n\} \subset X$，$x \in X$，则 $x_n \xrightarrow{w} x$ 的充要条件是下面两个条件成立：

(1) $\{\|x_n\|\}$ 有界，

(2) 存在 $G \subset X^*$，$\overline{G} = X^*$，使对一切 $f \in G$，有 $f(x_n) \to f(x)$.

例 11 $C[a,b]$ 中的点列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 $x_0 \in C[a,b]$ 的充要条件是：

(1) $\{x_n(t)\}$ 处处收敛于 $x_0(t)$，

(2) $\{\|x_n\|\}$ 为有界数列．

证 必要性：条件(2)显然成立，对于(1)，任取 $t_0 \in [a,b]$，作 $f_0 \in C^*[a,b]$ 如下：

$$f_0(x) = x(t_0) \quad (x(t) \in C[a,b]).$$

因为 $x_n \xrightarrow{w} x_0$，所以

$$x_n(t_0) \to x_0(t_0) \ (n \to \infty).$$

充分性：设 $f \in C^*[a,b]$，则存在 $v(t) \in BV[a,b]$，使

$$f(x) = \int_a^b x(t)\mathrm{d}v(t) \quad (x(t) \in C[a,b]). \tag{3.15}$$

因为 $x(t)$RS 可积，必 LS 可积，且积分值相等(参阅文章[6]第四章)．现设 $\{x_n(t)\}$ 满足条件(1)，(2)，由 LS 积分的勒贝格控制收敛定理，得

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b x_n(t)\mathrm{d}v(t) = \int_a^b x_0(t)\mathrm{d}v(t),$$

即

$$f(x_n) \to f(x_0) \ (n \to \infty),$$

故 $x_n \xrightarrow{w} x_0$.

利用例 11 的结果,可以在 C$[a,b]$中作出一个弱收敛但不强收敛的点列.为简单起见,设$[a,b]=[0,1]$,令

$$x_n(t) = \frac{nt}{1+n^2t^2} \quad (n=1,2,3,\cdots),$$

显然$\{x_n(t)\}$处处收敛于 0. 利用初等数学的方法或数学分析中求最大值的方法,可以证明

$$\| x_n \| = \frac{1}{2} \ (n=1,2,3,\cdots),$$

故 $x_n \xrightarrow{w} 0$,但$\{x_n\}$不强收敛于 0.

例 11 还告诉我们,对于一致有界函数序列来说,处处收敛等价于弱收敛.

弱收敛是抽象分析中的一个重要概念,本质上讲弱收敛对无穷维空间才有意义,因为我们可以证明对任意的有限维空间,点列的弱收敛与强收敛是等价的.

本节最后我们再举几个例子说明在 Banach 逆算子定理和共鸣定理中,空间完备性条件是不可少的.

例 12 设 $X=\{(\xi_n):(\xi_n)$为实数列,只有有限个 $\xi_n \neq 0\}$,$x \in X$,规定 $\|x\| = \sup\limits_n |\xi_n|$,则 X 是一个赋范线性空间,作 X 到 X 的一个线性算子 T:

$$y = Tx = \left(\xi_1, \frac{1}{2}\xi_2, \frac{1}{3}\xi_3, \cdots\right) \quad (x=(\xi_n) \in X).$$

试证明 T 是 X 到 X 上的一对一有界线性算子,但 T^{-1}无界.

证 T 是有界线性算子显然,且 $Tx=0$,必有 $x=0$,故 T 是一对一的.任取 $y=(\eta_n)\in X$,令 $x=(n\eta_n)\in X$,则必有

$$Tx = y,$$

故 T 是 $X \to X$ 上的一对一有界线性算子,$T^{-1}y=(n\eta_n)$ $(y=(\eta_n)\in X)$. 令

$$e_n = (\underbrace{0,\cdots,0,1}_{n\text{位}},0,\cdots) \in X \ (n=1,2,3,\cdots).$$

因为 $\|T^{-1}e_n\|=n\to\infty$，所以 T^{-1} 无界．

我们容易证明 X 不完备，事实上，取 X 中元素序列

$$x_n=(1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n},0,\cdots)\ (n=1,2,3,\cdots),$$

则 $x_n\to x=(1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n},\frac{1}{n+1},\cdots)$，但 $x=(\frac{1}{n})\overline{\in}X$，故 X 不完备．

例 13 X 同例 12，$x=(\xi_n)\in X$，令

$$f_n(x)=n\xi_n\quad(n=1,2,3,\cdots),$$

则 $f_n\in X^*$，且 $\sup\limits_n|f_n(x)|=\sup\limits_n|n\xi_n|<\infty\ (x\in X)$，但 $\|f_n\|=n\to\infty$，从而说明共鸣定理中条件 X 的完备性不可少．

例 14 设 X 为多项全体组成的空间．$x\in X$，令

$$\|x\|=\max_j|\alpha_j|,$$

其中 $\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是 n 次多项式 $x(t)$ 的系数．试证明 X 不完备．

证 我们构造一个有界线性算子序列 $\{T_n\}$，使

$$\sup_n\|T_nx\|<\infty\ (x\in X),$$

但

$$\sup_n\|T_n\|=\infty$$

$x(t)\in X$，用 $N(x)$ 表示多项式 $x(t)$ 的次数，并记

$$x(t)=\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_jt^j\quad(j>N(x)\text{ 时},\alpha_j=0).$$

令 $T_n=f_n\in X^*$ 如下：

$$f_n(x)=\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_{n-1}\quad(x\in X).$$

f_n 线性显然，因为 $|\alpha_j|\leqslant\|x\|$，所以 $|f_n(x)|\leqslant n\cdot\|x\|$，$\|f_n\|\leqslant n$. 对每一个 $x\in X$，$x(t)$ 的系数有 $(N(x)+1)$ 个，则

$$|f_n(x)|\leqslant(N(x)+1)\max_j|\alpha_j|.$$

故

$$\sup_n|f_n(x)|<+\infty.$$

但可以证明 $\|f_n\|=n\to\infty$. 事实上，取

$$x(t) = 1 + t + t^2 + \cdots + t^n,$$

则 $\| x \| = 1, f_n(x) = n = n \cdot \| x \|$，故 $\| f_n \| = n \to \infty$，于是据共鸣定理我们可得 X 不完备．

§4 全连续算子及其初等性质

全连续算子在应用上是很重要的一类算子，它在积分方程和各种数学物理问题中起着重要的作用，它的性质非常类似有限维空间上的线性算子的那些性质．由于篇幅的限制本书不去讨论全连续线性算子的谱理论(Riesz-Schauder 理论)，我们在这里仅介绍赋范线性空间上全连续算子的定义和初等性质．

定义 4.1 （全连续算子） 设 X, Y 是赋范线性空间，T 是 X 到 Y 中的线性算子，如果 T 将 X 中的任一有界集映成 Y 中的列紧集，则称 T 为**全连续算子或紧线性算子**．

定理 4.1 设 X, Y 是赋范线性空间，则

(1) 若 T 是 X 到 Y 的全连续算子，则 T 必连续，

(2) 如果 $\dim X = \infty$，恒同算子 $I: X \to X$ 不是全连续的．

证 (1) 设 T 全连续，则 T 将 X 中的任一有界集映成 Y 中的列紧集，列紧集必有界，故 T 连续．

(2) 取单位球 $S = \{x \in X; \| x \| = 1\}$，因为 $\dim X = \infty$，则 S 不是列紧集从而 I 不是全连续的．

定理 4.2 设 X, Y 是赋范线性空间，$T: X \to Y$ 是线性算子，则

(1) 如果 $T \in \mathscr{B}(X, Y)$，且 $\dim \mathscr{R}(T) < \infty$，则 T 全连续，

(2) 如果 $\dim X < \infty$，则 T 全连续.

证 (1) 因为 T 有界，且 $\dim \mathscr{R}(T) < \infty$，则 T 将 X 的任一有界集 A 映成有穷维空间中的有界集 $T(A)$，$T(A)$ 必列紧，所以 T 全连续．

(2) 设 $\dim X < \infty$，则 $\mathscr{R}(T)$ 必为 Y 中的有穷维空间，故 T 必

有界，再由(1)立即知 T 全连续．

今后我们称 $\dim\mathscr{R}(T)<\infty$ 的有界线性算子为**有穷秩算子**，由定理 4.2，有穷秩算子必全连续．

定理 4.3 设 X,Y,Z 都是赋范线性空间，$T\in\mathscr{B}(X,Y)$，$S\in\mathscr{B}(Y,Z)$，如果 T,S 中有一个是全连续算子，则 ST 是全连续算子．

证 不妨设 S 为全连续算子．任取 X 中一有界集 A，则 $T(A)$ 是 Y 中的有界集，从而 $ST(A)$ 是 Z 的列紧集，故 ST 全连续．

推论 设赋范线性空间 X,Y 中有一个是无穷维的，$T\in\mathscr{B}(X,Y)$ 全连续，则 T 不可能有定义在 Y 上的有界逆算子．

证 不妨设 $\dim X=\infty$，如果 T 有有界逆算子 $T^{-1}\in\mathscr{B}(Y,X)$，则 $I_X=T^{-1}T$ 全连续，这与定理 4.1 结论(2)矛盾，故 T 不可能有定义在 Y 上的有界逆算子．

定理 4.4 设 X 是赋范线性空间，Y 是 Banach 空间，$\{T_n\}$ 是 X 到 Y 的全连续算子列．如果 $\|T_n-T\|\to 0\ (n\to\infty)$，则 T 也是全连续算子．

证 设 $M\subset X$ 是任一有界集，则对每个 n，$T_n(M)$ 是 Y 中的列紧集．由于 $\|T_n-T\|\to 0\ (n\to\infty)$，故对任给的 $\varepsilon>0$，存在自然数 n_0，使

$$\|T_{n_0}x-Tx\|<\varepsilon,$$

对一切 $x\in M$ 成立，即 $T_{n_0}(M)$ 是 $T(M)$ 的一个列紧 ε 网．因为 Y 完备，则 $T(M)$ 列紧，从而 T 是全连续算子．

例 1 设 $X=Y=l^2$，$T:X\to X$ 定义如下：

$$y=Tx=\left(\frac{\xi_i}{i}\right),\ x=(\xi_i)\in l^2,$$

则 T 是全连续的．

证 T 是 $l^2\to l^2$ 中的有界线性算子显然，令 $T_n:l^2\to l^2$ 如下：

$$T_n x = \left(\xi_1, \frac{\xi_2}{2}, \cdots, \frac{\xi_n}{n}, 0, \cdots\right) \ (n = 1,2,3,\cdots),$$

则每个 T_n 为有穷秩算子，且

$$\| (T - T_n)x \|^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i^2} |\xi_i|^2 \leqslant \frac{1}{(n+1)^2} \| x \|^2,$$

所以

$$\| T_n - T \| \to 0 \ (n \to \infty).$$

T 全连续．

例 2 设 $K(t,s)$在 $a \leqslant t \leqslant b, a \leqslant s \leqslant b$ 上连续，

$$(Tx)(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)\mathrm{d}s, \ x(s) \in \mathrm{C}[a,b],$$

则 T 是 $\mathrm{C}[a,b] \to \mathrm{C}[a,b]$的全连续算子．

证 任取 $M \subset \mathrm{C}[a,b]$，$M$ 为有界集，设

$$\| x \| \leqslant K \quad (\forall\, x \in M).$$

我们证明 $T(M)$为 $\mathrm{C}[a,b]$中的列紧集，即证明 $T(M)$有界且等度连续．因为 T 有界，故 $T(M)$有界显然．任取 $x(t) \in M$，

$$|Tx(t_1) - Tx(t_2)| \leqslant \int_a^b |K(t_1,s) - K(t_2,s)| \cdot |x(s)| \mathrm{d}s$$

$$\leqslant K \int_a^b |K(t_1,s) - K(t_2,s)| \mathrm{d}s.$$

由条件，$K(t,s)$在矩形域$[a,b] \times [a,b]$上一致连续，故对任给的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得当 $t_1, t_2 \in [a,b]$，$|t_1 - t_2| < \delta$ 时，有

$$|K(t_1,s) - K(t_2,s)| < \frac{\varepsilon}{K(b-a)} \quad (\forall\, s \in [a,b]).$$

从而对一切 $x(t) \in M$，有

$$|Tx(t_1) - Tx(t_2)| < \varepsilon,$$

即 $T(M)$等度连续，故 T 是全连续的．

定理 4.5 设 X, Y 是赋范线性空间，T 是 $X \to Y$ 中的全连续算子，则 T 将 X 中弱收敛点列映成 Y 中的强收敛点列．

证 首先证明若 $x_n \xrightarrow{w} x_0$，则 $Tx_n \xrightarrow{w} Tx_0$（在 Y 中）．事实

上，任取 $g\in Y^*$，我们令

$$f(x)=g(Tx)\quad(x\in X),$$

则 $f\in X^*$，因为 $x_n\xrightarrow{w}x_0$，所以 $f(x_n)\to f(x_0)\ (n\to\infty)$，即

$$g(Tx_n)\to g(Tx_0)\quad(\forall\, g\in Y^*),$$

故 $Tx_n\xrightarrow{w}Tx_0$. 下面证明 $Tx_n\to Tx_0$. 设不然，则存在 $\varepsilon_0>0$ 以及子序列 $\{x_{n_k}\}$，使

$$\|Tx_{n_k}-Tx_0\|\geqslant\varepsilon_0. \tag{4.1}$$

因为 $\{x_n\}$ 弱收敛，故 $\{\|x_n\|\}$ 有界，又因为 T 全连续，故 $\{Tx_{n_k}\}$ 中必可取示一强收敛子序列，不妨设 $Tx_{n_k}\to y_0$，在(4.1)式中令 $k\to\infty$，得

$$\|y_0-Tx_0\|\geqslant\varepsilon_0. \tag{4.2}$$

但强收敛必弱收敛，则由弱极限的唯一性，得

$$Tx_0=y_0,$$

这与(4.2)式矛盾，故 $Tx_n\to Tx_0$.

定理 4.6 设 X,Y 是赋范线性空间，$T\in\mathscr{B}(X,Y)$，T 全连续，则 T 的值域 $\mathscr{R}(T)$ 是可分的.

证 令 $S_n=\{x\in X:\|x\|<n\}$，$M_n=TS_n$，则

$$X=\bigcup_{n=1}^{\infty}S_n,\ \mathscr{R}(T)=\bigcup_{n=1}^{\infty}M_n.$$

由于每个 S_n 有界，则每个 M_n 列紧，从而可分，于是存在可数稠子集 D_n. 令 $D=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}D_n$，易知 D 是 $\mathscr{R}(T)$ 的可数稠子集，故 $\mathscr{R}(T)$ 可分.

***定理 4.7** 设 X,Y 是赋范线性空间，$T\in\mathscr{B}(X,Y)$，T 全连续，则 T^* 也全连续.

为了证明定理 4.7，我们先证明下面的引理.

引理 设 X 是赋范线性空间，$A\subset X$ 列紧，$\{f_n\}\subset X^*$，$\{\|f_n\|\}$有界，$f_0\in X^*$，如果对每个 $x\in A$，$f_n(x)\to f_0(x)\ (n\to\infty)$，则 $\{f_n\}$ 在 A 上一致收敛于 f_0.

证 因为 A 列紧，则对任给的 $\varepsilon>0$，A 有有穷 ε 网 $\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}\subset A$. 由引理条件，存在自然数 N，使得 $n>N$ 时，对 $j=1$，

2,…,k,有

$$|f_n(x_j)-f_0(x_j)|<\varepsilon, \tag{4.3}$$

任取 $x\in A$,必存在 $x_{j_0}(1\leqslant j_0\leqslant k)$,使

$$\|x-x_{j_0}\|<\varepsilon.$$

故当 $n>N$ 时,

$$\begin{aligned}|f_n(x)-f_0(x)| &\leqslant |f_n(x)-f_n(x_{j_0})|+|f_n(x_{j_0})-f_0(x_{j_0})| \\ &\quad +|f_0(x_{j_0})-f_0(x)| \\ &\leqslant \|f_n\|\cdot\|x-x_{j_0}\|+\varepsilon \\ &\quad +\|f_0\|\cdot\|x-x_{j_0}\| \\ &\leqslant (K+\|f_0\|+1)\varepsilon,\end{aligned}$$

其中 $K=\sup\limits_n\|f_n\|$,故$\{f_n\}$在 A 上一致收敛于 f_0.

定理 4.7 的证明 任取$\{f_n\}\subset Y^*$,$\{\|f_n\|\}$有界,我们要证明$\{T^*f_n\}$存在收敛子序列,下面分两步来进行.

(1) 因为 T 全连续,则 $\mathscr{R}(T)$可分,将 f_n 看作 $\mathscr{R}(T)$上的有界线性泛函,由本章§3 定理 3.11,在 $\mathscr{R}(T)^*$ 中存在 $f_{n_k}\xrightarrow{w^*}f_0\in\mathscr{R}(T)^*$. f_0 定义在 $\mathscr{R}(T)$上,利用 Hahn-Banach 延拓定理,将 f_0 保范延拓到 Y 上,仍记为 f_0,即 $f_0\in Y^*$.

(2) 证明 $T^*f_{n_k}\to T^*f_0$(在 X^* 中收敛),从而 T^* 全连续.

取 X 中闭球 $\widetilde{S}_1=\{x\in X:\|x\|\leqslant 1\}$,由于 T 全连续,则 $T(\widetilde{S}_1)$ 是 Y 中的列紧集.又因为在 $\mathscr{R}(T)^*$ 中 $f_{n_k}\xrightarrow{w^*}f_0$,则 f_{n_k} 在 $T(\widetilde{S}_1)$ 上处处收敛于 f_0,据引理 f_{n_k} 在 $T(\widetilde{S}_1)$ 上一致收敛于 f_0. 因此,对任给的 $\varepsilon>0$,存在自然数 N,使得当 $k>N$ 时,对一切 $x\in\widetilde{S}_1$ 成立

$$|f_{n_k}(Tx)-f_0(Tx)|<\varepsilon,$$

即

$$|T^*f_{n_k}(x)-T^*f_0(x)|<\varepsilon\quad(k>N,\forall\, x\in\widetilde{S}_1).$$

故

$$\| T^* f_{n_k} - T^* f_0 \| \leqslant \varepsilon \quad (k > N).$$

这就证明了$\{T^* f_{n_k}\}$在X^*中收敛于$T^* f_0$,故T^*全连续.

§5 Hilbert 空间上的线性泛函和线性算子

5.1 Hilbert 空间上有界线性泛函的表示

设H是一个 Hilbert 空间,任取$u\in H$,则可作H上的泛函

$$f_u(x) = (x,u) \ (x \in H). \tag{5.1}$$

易知f_u是H上的有界线性泛函,且$\| f_u \| \leqslant \| u \|$. 另一方面,因为$u\neq 0$时,

$$\| f_u \| \cdot \| u \| \geqslant |f_u(u)| = (u,u) = \| u \|^2,$$

$$\| f_u \| \geqslant \| u \|,$$

故可得$\| f_u \| = \| u \|$. 由此可知,对任一$u\in H$,(5.1)式定义了 Hilbert 空间H上的一个有界线性泛函f,且$\| f_u \| = \| u \|$. 下面将证明H上任一有界线性泛函必具有(5.1)形式.

定理 5.1 (Riesz 表现定理) 设H是 Hilbert 空间,f是H上的有界线性泛函,则必有唯一的$u\in H$,使

$$f(x) = (x,u), \tag{5.2}$$

且$\| f \| = \| u \|$.

证 若$f=0$,则取$u=0$即可. 设$f\neq 0$,令

$$L = \{x \in H: f(x) = 0\},$$

则L是H的真闭子空间. 由直交分解定理可知,存在$y_0\neq 0$,使$y_0\perp L$,从而$y_0\overline{\in} L$,可设$f(y_0)=1$. 任取$x\in H$,则

$$f(x - f(x)y_0) = f(x) - f(x)f(y_0) = 0,$$

故

$$x - f(x)y_0 \in L.$$

$$(x - f(x)y_0, y_0) = 0,$$

即

$$f(x)\|y_0\|^2 = (x, y_0).$$

令 $u = \dfrac{y_0}{\|y_0\|^2}$，即可得

$$f(x) = (x, u) \ (\forall\ x \in H).$$

由上式定义的有界线性泛函 f，我们已证明 $\|f\| = \|u\|$，故只需证明 u 的唯一性．设另有 u'，使

$$f(x) = (x, u') \ (\forall\ x \in H),$$

则

$$(x, u - u') = 0 \ (\forall\ x \in H),$$

故 $u - u' = 0$，即 $u = u'$.

由 Riesz 表示定理，可作映射 $T: H \to H^*$ 上：

$$Tu = f_u, \text{其中 } f_u(x) = (x, u).$$

因为

$$f_{u+v}(x) = (x, u+v) = (x, u) + (x, v) = (f_u + f_v)(x),$$

所以

$$T(u+v) = Tu + Tv, \tag{5.3}$$

即 T 是可加的．另一方面，$\alpha \in K$ 时，因为

$$f_{\alpha u}(x) = (x, \alpha u) = \bar{\alpha}(x, u) = \bar{\alpha} f_u(x).$$

所以

$$T(\alpha u) = \bar{\alpha} Tu. \tag{5.4}$$

即 T 具有共轭齐性．我们称满足(5.3)，(5.4)的映射 T 为**共轭线性(或反线性)映射**．定理 5.1 还证明了 $\|f_u\| = \|u\|$，故 $\|T_u\| = \|u\|$，T 是 $H \to H^*$ 上的一对一的共轭线性等距映射，也称 H 和 H^* 是等距同构的．我们仍将 f_u 与 u 视为同一，从而 H 与 H^* 可视为同一，并称 H 为**自共轭空间**．

5.2 共轭算子及其简单性质

在 Banach 空间中，设 $T \in \mathscr{B}(X, Y)$，则 $T^* \in (Y^*, X^*)$，且对

任一 $f\in Y^*$ 和 $x\in X$，有

$$T^* f(x) = f(Tx), \tag{5.5}$$

T^* 称为 T 的共轭算子.

对于 Hilbert 空间 H，可以不通过它的共轭空间直接定义共轭算子.

取定 $y\in H$，令

$$f(x) = (Tx, y) \quad (\forall\, x\in H),$$

则 f 是 H 上的有界线性泛函，由 Riesz 表示定理，存在唯一的 $z\in H$，使

$$f(x) = (Tx, y) = (x, z). \tag{5.6}$$

作映射 $T':H\to H$ 如下：

$$T'y = z \quad (y\in H), \tag{5.7}$$

则

$$(Tx, y) = (x, T'y) \ (\forall\, x, y\in H). \tag{5.8}$$

定义 5.1 (Hilbert 共轭算子) 设 H 为 Hilbert 空间，$T\in \mathscr{B}(H)$，则称由(5.7)定义的算子 T' 为 T 的(Hilbert)**共轭算子**.

定理 5.2 设 H 是 Hilbert 空间，$T\in\mathscr{B}(H)$，则 $T'\in\mathscr{B}(H)$，且

$$\|T'\| = \|T\|.$$

证 因为对一切 $x, y\in H$，有

$$(Tx, y) = (x, T'y).$$

设 $y_1, y_2\in H$，$\alpha, \beta\in K$，则对一切 $x\in H$，有

$$\begin{aligned}(x, T'(\alpha y_1+\beta y_2)) &= (Tx, \alpha y_1+\beta y_2)\\ &= \bar{\alpha}(Tx, y_1)+\bar{\beta}(Tx, y_2)\\ &= \bar{\alpha}(x, T'y_1)+\bar{\beta}(x, T'y_2)\\ &= (x, \alpha T'y_1+\beta T'y_2).\end{aligned}$$

故

$$T'(\alpha y_1+\beta y_2) = \alpha T'y_1+\beta T'y_2,$$

即 T' 是 H 上的线性算子．又因为

$$\|T'y\| = \|z\| = \sup_{\|x\|=1} |(Tx,y)| \leqslant \|T\| \cdot \|y\|,$$

则 $T' \in \mathscr{B}(H)$，$\|T'\| \leqslant \|T\|$．另一方面，取 $y=Tx$，由(5.8)可得

$$\|Tx\|^2 \leqslant \|x\| \cdot \|T'Tx\| \leqslant \|x\| \cdot \|T'\| \cdot \|Tx\|,$$

所以 $\|T\| \leqslant \|T'\|$，故 $\|T'\| = \|T\|$．

如果将 H 看作 Banach 空间，我们可按(5.5)式来定义共轭算子 $T^* \in \mathscr{B}(H^*)$．下面我们将给出 $T' \in \mathscr{B}(H)$ 和 $T^* \in \mathscr{B}(H^*)$ 的关系．

任取 $y \in H$，有 $f_y \in H^*$ 与之对应，其中 $f_y(x)=(x,y)$．设 $T^* \in \mathscr{B}(H^*)$，则 $T^* f_y \in H^*$．按定理 5.1，存在唯一的 $z \in H$，使

$$T^* f_y = f_z.$$

故由 T^* 导出了一个从 $H \to H$ 的算子 $\widetilde{T}^*$：$\widetilde{T}^* y = z$.

任取 $x \in H$，我们有

$$\begin{aligned}(x,\widetilde{T}^* y) &= (x,z) = f_z(x) = (T^* f_y)(x) \\ &= f_y(Tx) = (Tx,y).\end{aligned} \tag{5.9}$$

比较(5.8)和(5.9)，得

$$(x,T'y) = (x,\widetilde{T}^* y) \quad (\forall\ x,y \in H) \tag{5.10}$$

故(Hilbert)共轭算子 T' 实质上就是 $T^* \in \mathscr{B}(H^*)$ 在 H 上的导出算子 $\widetilde{T}^*$．今后，我们仍记 T' 为 T^*，并仍称它为 T 的共轭算子，于是

$$(Tx,y) = (x,T^* y),$$

这里 T^* 是 $H \to H$ 的算子．

例 1 考察 n 维复欧几里得空间 C^n 中，由方阵

$$A = (\alpha_{ij})\ (i,j = 1,2,3,\cdots,n),$$

定义的算子 T

$$x = (\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n) \to Tx = x' = (\xi'_1,\xi'_2,\cdots,\xi'_n),$$

其中

$$\xi'_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\xi_j \quad (i = 1,2,\cdots,n).$$

求 T^*.

解 设 $e_i=(\underbrace{0,\cdots,0,1}_{i\text{位}},0,\cdots,0)$, $i=1,2,\cdots,n$. 则易知

$$\alpha_{ij} = (Te_j,e_i).$$

现设 $T^* \leftrightarrow (\alpha_{ij}^*)$, 则

$$\begin{aligned}\alpha_{ij}^* &= (T^*e_j,e_i) = (e_j,Te_i)\\ &= \overline{(Te_i,e_j)} = \bar{\alpha}_{ji}.\end{aligned}$$

故 C^n 中 T^* 是由 (α_{ij}) 的共轭转置方阵 $(\bar{\alpha}_{ji})$ 所定义.

例 2 设 $K(t,s)$ 是定义在 $a\leqslant t\leqslant b, a\leqslant s\leqslant b$ 上的平方可积函数, 由 $K(t,s)$ 定义了从 $L^2[a,b]$ 到 $L^2[a,b]$ 的有界线性算子 T:

$$Tx(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)\mathrm{d}s,$$

求 T^*.

解 任取 $x(t),y(t)\in L^2[a,b]$, 则有

$$\begin{aligned}(x,T^*y) = (Tx,y) &= \int_a^b \left[\int_a^b K(t,s)x(s)\mathrm{d}s\right]\overline{y(t)}\mathrm{d}t\\ &= \int_a^b x(s)\,\overline{\left[\int_a^b \overline{K(t,s)}y(t)\mathrm{d}t\right]}\mathrm{d}s\\ &= \int_a^b x(t)\,\overline{\left[\int_a^b \overline{K(s,t)}y(s)\mathrm{d}s\right]}\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

故

$$T^*y(t) = \int_a^b \overline{K(s,t)}y(s)\mathrm{d}s.$$

即 T^* 是以 $K^*(t,s)=\overline{K(s,t)}$ 为核的积分算子.

定理 5.3 (共轭算子的性质) 设 H 是 Hilbert 空间, $T,T_1,T_2\in\mathscr{B}(H)$, α,β 为数, 则

(1) $(T^*)^*=T$,

(2) $(\alpha T_1)^*=\bar{\alpha}T_1{}^*$, $(T_1+T_2)^*=T_1^*+T_2^*$,

(3) $(T_1T_2)^*=T_2^*T_1^*$,

(4) $\|T^*\|^2=\|T\|^2=\|T^*T\|$,

(5) 如果 $T^{-1}\in\mathscr{B}(H)$，则 $T^{*^{-1}}\in\mathscr{B}(H)$，且

$$T^{*-1}=(T^{-1})^*.$$

证 (1) 对任何 $x,y\in H$，有

$$(Tx,y)=(x,T^*y),$$

即

$$(T^*y,x)=(y,Tx).$$

由 $(T^*)^*$ 的定义，立即知 $(T^*)^*=T$.

(2) 对任意的 $x,y\in H$，有

$$((\alpha T_1)x,y)=\alpha(T_1x,y)=\alpha(x,T_1^*y)=(x,\bar{\alpha}T_1^*y),$$

所以 $(\alpha T_1)^*=\bar{\alpha}T_1^*$. 同理可证

$$(T_1+T_2)^*=T_1^*+T_2^*,$$

(3) 对任何 $x,y\in H$，有

$$(T_1T_2x,y)=(T_2x,T_1^*y)=(x,T_2^*T_1^*y),$$

所以 $(T_1T_2)^*=T_2^*T_1^*$.

(4) 在定理 5.2 中已证明 $\|T^*\|=\|T\|$，现证 $\|T^*T\|=\|T\|^2$. 事实上，首先有 $\|T^*T\|\leqslant\|T^*\|\cdot\|T\|=\|T\|^2$，另一方面，对任何 $x\in H$，$\|x\|=1$，

$$\|Tx\|^2=(Tx,Tx)=(T^*Tx,x)\leqslant\|T^*T\|.$$

所以 $\|T\|^2\leqslant\|T^*T\|$，这就证明了 $\|T^*\|^2=\|T\|^2=\|T^*T\|$.

(5) 注意到对任何 $x,y\in H$，有

$$\begin{aligned}(x,(T^{-1})^*T^*y)&=(T^{-1}x,T^*y)\\&=(TT^{-1}x,y)=(x,y),\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}(x,T^*(T^{-1})^*y)&=(Tx,(T^{-1})^*y)\\&=(T^{-1}Tx,y)=(x,y),\end{aligned}$$

故$(T^{-1})^*T^*=T^*(T^{-1})^*=I,(T^*)^{-1}=(T^{-1})^*\in\mathscr{B}(H)$.

5.3 有界自伴算子,正算子和投影算子

设 H 为 Hilbert 空间,$T\in\mathscr{B}(H)$,我们已经知道 $T^*\in\mathscr{B}(H)$,于是可以将 T 与 T^* 进行种种比较,例如考察它们是否相同,是否可换等. 本段将简单地介绍在应用上极为重要的自伴算子,正算子和投影算子.

定义 5.2 设 H 为 Hilbert 空间,$T\in\mathscr{B}(H)$,如果 $T=T^*$,则称 T 为**自伴算子**.

由定义 5.2 立即可得自伴算子有下列性质:

1° T 为自伴算子的充要条件是对任何 $x,y\in H$,有

$$(Tx,y)=(x,Ty). \tag{5.11}$$

我们称满足(5.11)的有界线性算子 T 为**对称算子**. 因此,对定义在 H 上的有界线性算子来说,自伴性等价于对称性.

2° 设 H 为复的 Hilbert 空间,则 T 自伴的充要条件是对任何 $x\in H$,(Tx,x)为实数.

证 设 T 自伴,则对任何 $x\in H$,有

$$(Tx,x)=(x,Tx)=\overline{(Tx,x)},$$

故(Tx,x)为实数. 反之,如果对任何 $x\in H$,(Tx,x)为实数,则

$$(Tx,x)=(x,Tx)=(T^*x,x),$$

从而

$$((T^*-T)x,x)=0\quad(\forall\ x\in H). \tag{5.12}$$

令 $A=T^*-T$,利用等式

$$(Ax,y)=\frac{1}{4}[(A(x+y),x+y)-(A(x-y),x-y)$$
$$+i(A(x+iy),x+iy)-i(A(x-iy),x-iy)],$$

则可得

$$(Ax,y)=0\quad(\forall\ x,y\in H).$$

取 $y=Ax$,就得 $Ax=0\ (\forall\ x\in H)$. 故 $T=T^*$,即 T 是自伴算子.

在 5.2 段所讨论的两个例子中，如果在例 1 中，有

$$\alpha_{ij} = \bar{\alpha}_{ji} (i, j = 1, 2, \cdots, n).$$

则由(α_{ij})定义的算子 T 是自伴的．如果在例 2 中，

$$K(t,s) = \overline{K(s,t)},$$

则以 $K(t,s)$为核的积分算子也是自伴的．

例 3 在复的 $L^2[0,1]$中考察乘法算子：

$$Tx(t) = tx(t) \quad (x(t) \in L^2[0,1]).$$

显然 T 是 $L^2[0,1] \to L^2[0,1]$的有界线性算子，由于

$$(Tx, x) = \int_0^1 t |x(t)|^2 dt$$

为实数，故 T 自伴．

例 4 设 $H=$(复)$L^2(-\infty, +\infty)$，$x(t)$为$(-\infty, +\infty)$上的实有界勒贝格可测函数，乘 $x(t)$的算子为

$$T: f(t) \to x(t)f(t), f \in L^2(-\infty, +\infty),$$

则 T 是 H 上的有界自伴算子，且 $\|T\| = \|x\|_\infty$，其中 $\|\cdot\|_\infty$ 表示 $x(t)$在 $L^\infty(-\infty, +\infty)$中的范数．

事实上，由于 $x(t) \in L^\infty(-\infty, +\infty)$，则

$$\|Tf\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)f(t)|^2 dt \leqslant \|x\|_\infty^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt,$$

故 T 有界，且 $\|T\| \leqslant \|x\|_\infty$．另一方面，对任何 $\varepsilon > 0$，令

$E_+ = \{t : x(t) \geqslant \|x\|_\infty - \varepsilon\}$，$E_- = \{t : x(t) \leqslant -\|x\|_\infty + \varepsilon\}$，

则 $m(E_+)$和 $m(E_-)$中至少有一个大于 0，例如 $m(E_+) = \delta > 0$，在 $L^2(-\infty, +\infty)$上取函数

$$f_\delta(t) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1}{\delta}}, & \text{当 } t \in E_+ \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } t \overline{\in} E_+ \text{ 时}. \end{cases}$$

显然 $\|f_\delta\| = 1$，但

$$\|Tf_\delta\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)f_\delta(t)|^2 dt \geqslant (\|x\|_\infty - \varepsilon)^2,$$

故

$$\|T\| \geqslant \|x\|_\infty - \varepsilon.$$

令 $\varepsilon \to 0$,就得到

$$\|T\| \geqslant \|x\|_\infty.$$

从而 $\|T\| = \|x\|_\infty$.

因为对任何 $f \in L^2(-\infty, +\infty)$,有

$$(Tf, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) |f(t)|^2 \mathrm{d}t$$

是实数,故 T 是自伴算子.

定理 5.5 设 H 为 Hilbert 空间,$T \in \mathscr{B}(H)$,记 $\mathscr{N}(T) = \{x \in H: Tx = 0\}$,$\mathscr{R}(T) = \{Tx: x \in H\}$,则有

$$\mathscr{N}(T) = \mathscr{R}(T^*)^\perp, \mathscr{N}(T^*) = \mathscr{R}(T)^\perp. \tag{5.13}$$

特别地,如果 T 自伴,则

$$\mathscr{N}(T) = \mathscr{R}(T)^\perp, \ H = \mathscr{N}(T) \oplus \overline{\mathscr{R}(T)}.$$

证 因为对任意的 $x, y \in H$,有 $(Tx, y) = (x, T^* y)$,则对任一 $x \in \mathscr{N}(T)$,有

$$(x, T^* y) = (Tx, y) = 0 \quad (\forall\ y \in H),$$

故 $\mathscr{N}(T) \subset \mathscr{R}(T^*)^\perp$. 反之,$x \in \mathscr{R}(T^*)^\perp$ 时,对任何 $y \in H$,有

$$(x, T^* y) = 0,$$

即 $(Tx, y) = 0$,取 $y = Tx$,即得 $Tx = 0$,故 $x \in \mathscr{N}(T)$. 这就证明了等式

$$\mathscr{N}(T) = \mathscr{R}(T^*)^\perp.$$

用 T^* 代 T,注意到 $(T^*)^* = T$,从上式立即得

$$\mathscr{N}(T^*) = \mathscr{R}(T)^\perp.$$

定理 5.6 设 T 为 Hilbert 空间上的有界自伴算子,则

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |(Tx, x)|.$$

证 令 $K = \sup\limits_{\|x\|=1} |(Tx, x)|$,由于

$$|(Tx, x)| \leqslant \|T\| \cdot \|x\|^2,$$

所以

$$K \leqslant \| T \|.$$

另一方面，显然有

$$|(Tx,x)| \leqslant K \cdot \| x \|^2.$$

任取 $\lambda>0, x\neq 0$ 时，令 $y=\lambda x, z=\frac{1}{\lambda}Tx$. 因为 T 自伴，易证

$$\begin{aligned}
(Ty,z) &= \frac{1}{4}[(T(y+z),y+z)-(T(y-z),y-z)] \\
&\leqslant \frac{K}{4}(\| y+z \|^2 + \| y-z \|^2) \\
&= \frac{K}{2}(\| y \|^2 + \| z \|^2) \\
&= \frac{K}{2}(\lambda^2 \| x \|^2 + \frac{1}{\lambda^2} \| Tx \|^2).
\end{aligned}$$

特别取 $\lambda^2=\frac{\| Tx \|}{\| x \|}$，则得

$$\begin{aligned}
\| Tx \|^2 &\leqslant \frac{K}{2}(\| Tx \| \cdot \| x \| + \| x \| \cdot \| Tx \|) \\
&= K \| Tx \| \cdot \| x \|.
\end{aligned}$$

所以

$$\| Tx \| \leqslant K \cdot \| x \|,$$

故 $\| T \| \leqslant K$，这样就证明了 $\| T \| = K$.

定义 5.3 设 H 为 Hilbert 空间，$T\in\mathscr{B}(H)$，T 自伴．如果对一切 $x\in H$，有

$$(Tx,x) \geqslant 0,$$

则称 T 为**正算子**，记为 $T\geqslant 0$.

设 T_1, T_2 是有界自伴算子，如果 $T_1-T_2\geqslant 0$，则称 $T_1\geqslant T_2$.

显然，如果 H 为复 Hilbort 空间，$T\in\mathscr{B}(H)$，且对一切 $x\in H$，有 $(Tx,x)\geqslant 0$，则必有 $T\geqslant 0$.

由定义 5.3 可以得到下列简单性质：

1° 设 T_1, T_2 自伴，且 $T_1\geqslant T_2$，则对任何自伴算子 T 以及实数 $c\geqslant 0$，有

$$T + T_1 \geqslant T + T_2, cT_1 \geqslant cT_2.$$

2° 设 $T \geqslant 0$，则对任一自然数 n，$T^n \geqslant 0$，从而，如果 $p(t)$ 为任一非负实系数多项式，则 $p(T) \geqslant 0$.

我们证明性质 2°. 若 n 为偶数，$n=2k$，则

$$(T^n x, x) = (T^k x, T^k x) \geqslant 0.$$

若 n 为奇数，$n=2k+1$，则

$$(T^n x, x) = (T(T^k x), T^k x) \geqslant 0.$$

故对任一自然数 n，有 $T^n \geqslant 0$.

3° （广义 Schwartz 不等式） 设 $T \geqslant 0$，则对一切 $x, y \in H$，有

$$|(Tx, y)|^2 \leqslant (Tx, x)(Ty, y). \tag{5.14}$$

证 令 $Z_\lambda = x + \lambda(Tx, y)y$，其中 λ 为实数，则

$$\begin{aligned} 0 \leqslant (TZ_\lambda, Z_\lambda) &= (T(x + \lambda(Tx, y)y), x + \lambda(Tx, y)y) \\ &= (Tx, x) + 2\lambda|(Tx, y)|^2 + \lambda^2|(Tx, y)|^2(Ty, y). \end{aligned}$$

上式右端是 λ 的二次三项式，故

$$|(Tx, y)|^4 \leqslant |(Tx, y)|^2 \cdot (Tx, x)(Ty, y).$$

从而(5.14)成立.

下面引入**单调自伴算子序列**的概念：设 $\{T_n\}$ 为一自伴算子序列，若 $T_n \leqslant T_{n+1}$ $(n=1,2,3,\cdots)$，则称 $\{T_n\}$ 是**单调上升的**，若 $T_n \geqslant T_{n+1}$ $(n=1,2,3,\cdots)$，则称 $\{T_n\}$ **单调下降的**.

分析中单调有界数列必有极限，对于单调自伴算子序列有下面的结论.

定理 5.7 设 $\{T_n\}$ 为一致有界的单调自伴算子列，则存在唯一的自伴算子 T，使

$$T_n \xrightarrow{\text{强}} T.$$

证 不妨设 $\{T_n\}$ 单调上升，$\|T_n\| \leqslant K$ $(n=1,2,3,\cdots)$. 任取 m, n，设 $n > m$，令

$$T_{mn} = T_n - T_m \geqslant 0,$$

则

$$\|T_{mn}\| \leqslant 2K = \alpha,$$

$$0 \leqslant (T_{mn}x, x) \leqslant \alpha(x, x) \quad (x \in H). \tag{5.15}$$

再由广义的施瓦兹不等式，对任一 $x \in H$，有

$$\begin{aligned} \|T_{mn}x\|^4 &= |(T_{mn}x, T_{mn}x)|^2 \\ &\leqslant (T_{mn}x, x)(T_{mn}^2 x, T_{mn}x) \\ &\leqslant \alpha(T_{mn}x, x)(T_{mn}x, T_{mn}x), \end{aligned}$$

故

$$\|T_{mn}x\|^2 \leqslant \alpha(T_{mn}x, x). \tag{5.16}$$

由于对每个 $x \in H$，$\{(T_n x, x)\}$是单调上升的有界数列，故必收敛，于是当 $m, n \to \infty$时，$((T_n - T_m)x, x) \to 0$，由(5.16)即得

$$\|(T_n - T_m)x\| \to 0 \ (n, m \to \infty).$$

因为 H 完备，据本章§3 定理 3.9，存在唯一的 $T \in \mathscr{B}(H)$，使

$$T_n \xrightarrow{\text{强}} T.$$

T 显然是自伴的．

任一非负实数有唯一的非负平方根，这也是早已为人们所熟知的，对于正算子，类似的性质也成立．

定理 5.8 设 $T \geqslant 0$，则存在唯一的正算子 S，使 $S^2 = T$，称 S 为 T 的正平方根，记为 $T^{1/2}$，而且 $T^{1/2}$是 T 的多项式序列在强收敛意义下的极限，于是与 T 可换的任何算子必与 $T^{1/2}$可换．

证 不妨设 $0 \leqslant T \leqslant I$. 若 T 存在正平方根 S，则由 $T = S^2$ 得

$$-2S = -T + S^2 - 2S,$$

即

$$2(I - S) = (I - T) + (I - S)^2.$$

令 $A = I - S$，$B = I - T$，得

$$A = \frac{1}{2}(B + A^2). \tag{5.17}$$

因此问题归结为证明存在满足(5.17)的算子 A. 我们用迭代法证

明这一事实．由(5.17)按迭代法作出一个一致有界单调上升正算子序列$\{A_n\}$，使$\{A_n\}$强收敛于A. 令

$$A_0 = 0, A_1 = \frac{1}{2}(B + A_0^2), \cdots, A_{n+1} = \frac{1}{2}(B + A_n^2), \cdots, \tag{5.18}$$

首先用归纳法证明$\{A_n\}$是单调上升的正算子列．显然A_0, A_1以及$A_1 - A_0$都是正算子B的多项式，且系数是非负实数，因此都是正算子．今设A_{n-1}, A_n以及$A_n - A_{n-1}$也都是B的具有非负系数的多项式．显然A_n与A_{n-1}可换，则

$$A_{n+1} - A_n = \frac{1}{2}(A_n^2 - A_{n-1}^2) = \frac{1}{2}(A_n + A_{n-1})(A_n - A_{n-1}),$$

根据归纳法假设，$(A_n + A_{n-1})(A_n - A_{n-1})$是$B$的具有非负系数的多项式，从而$A_{n+1} - A_n$以及$A_{n+1}$都是$B$的具有非负系数的多项式，故均为正算子，$\{A_n\}$是单调上升的正算子序列．

其次再用归纳法证明$\| A_n \| \leqslant 1$对$n = 0, 1, 2, \cdots$成立．显然有$\| A_0 \| \leqslant 1$，$\| A_1 \| \leqslant 1$，现设$\| A_n \| \leqslant 1$，时

$$\| A_{n+1} \| \leqslant \frac{1}{2}(\| B \| + \| A_n \|^2) \leqslant 1.$$

故对一切n，$\| A_n \| \leqslant 1$，即$\{A_n\}$一致有界．由定理5.7，存在自伴算子A，使$\{A_n\}$强收敛于A，$0 \leqslant A \leqslant I$，从而容易证明$\{A_n^2\}$强收敛于$A^2$. 在等式

$$A_{n+1}x = \frac{1}{2}(B + A_n^2)x \quad (x \in H)$$

中令$n \to \infty$，得

$$Ax = \frac{1}{2}(B + A^2)x \quad (x \in H),$$

即$A = \frac{1}{2}(B + A^2)$. 令$S = I - A$，则S就是T的一个正平方根．

由于每个A_n是$B = I - T$的多项式，因此A_n也是T的多项式，故$S = I - A$是T的多项式序列的极限．

最后证明正平方根的唯一性．设S'也是T的正平方根，则

$S'^2=T$. 因为 $S'T=S'^3=TS'$，故 $SS'=S'S$. 由于 S,S' 均为正算子，令 C,C' 分别是 S,S' 的正平方根. 任取 $x\in H$，令 $y=(S-S')x$，则

$$\begin{aligned}\|Cy\|^2+\|C'y\|^2&=(Cy,Cy)+(C'y,C'y)\\&=(Sy,y)+(S'y,y)\\&=((S+S')y,y)\\&=((S+S')(S-S')x,y)\\&=((S^2-S'^2)x,y)=0.\end{aligned}$$

故 $Cy=C'y=0$，于是

$$\begin{aligned}\|y\|^2&=(y,y)=((S-S')x,y)=(C^2x,y)-(C'^2x,y)\\&=(Cx,Cy)-(C'x,C'y)=0.\end{aligned}$$

即对一切 $x\in H$，$Sx=S'x$，唯一性得证.

推论 1 设 T 为正算子，$x_0\in H$，若 $(Tx_0,x_0)=0$，则 $Tx_0=0$.

证 因为

$$0=(Tx_0,x_0)=(T^{1/2}T^{1/2}x_0,x_0)=\|T^{1/2}x_0\|^2,$$

即 $T^{1/2}x_0=0$，故 $Tx_0=T^{1/2}(T^{1/2})x_0=0$.

推论 2 设 T_1,T_2 自伴，$T_1\geqslant T_2$，正算子 T 与 T_1,T_2 均可换，则 $TT_1\geqslant TT_2$.

证 对任一 $x\in H$，

$$\begin{aligned}(TT_1x,x)&=(T_1T^{1/2}x,T^{1/2}x)\\&\geqslant(T_2T^{1/2}x,T^{1/2}x)\\&=(TT_2x,x),\end{aligned}$$

故 $TT_1\geqslant TT_2$.

利用 Hilbert 空间中的直交分解定理，可以很自然地引进另一类重要算子——直交投影算子.

定义 5.4 设 H 为 Hilbert 空间，M 为 H 的闭子空间，由直交分解定理，对任一 $x\in H$，可唯一分解为

$$x=x_1+x_2,$$

其中 $x_1\in M$，$x_2\in M^{\perp}$. 令 $Px=x_1$，则 P 为 $H\to M$ 上的有界线性

算子，称 P 为 M 上的**直交投影算子**，简称为**投影算子**.

由定义 5.4 直接可得下列性质成立：

1° $x \in M$ 当且仅当 $Px=x$，$x \in M^{\perp}$ 当且仅当 $Px=0$，

2° 若 $M \neq \{0\}$，则 $\|P\|=1$，

事实上，$\|Px\|^2=\|x_1\|^2 \leqslant \|x_1\|^2+\|x_2\|^2=\|x\|^2$，故 $\|P\| \leqslant 1$. 另一方面，任取 $x \in M$，$x \neq 0$，由 $Px=x$，得 $\|P\| \cdot \|x\| \geqslant \|Px\|=\|x\|$，$\|P\| \geqslant 1$，所以 $\|P\|=1$.

3° $I-P$ 为 $M^{\perp}$ 的投影算子.

定理 5.9 Hilbert 空间 H 中的线性算子 P 为投影算子的充要条件是：

(1) P 是自伴的，

(2) $P^2=P$（幂等性）.

证 必要性：任取 $x,y \in H$，作直交分解

$$x = x_1 + x_2,\ y = y_1 + y_2,$$

其中 $x_1,y_1 \in M$，$x_2,y_2 \in M^{\perp}$，则

$$\begin{aligned}(Px,y) &= (x_1,y_1+y_2) = (x_1,y_1) \\ &= (x_1+x_2,y_1) = (x,Py).\end{aligned}$$

即 P 为自伴算子. 又因为

$$P^2x = P(Px) = Px_1 = x_1 = Px\ (x \in H).$$

故 $P^2=P$.

充分性：设 $P^2=P=P^*$. 令 $M=\mathscr{R}(P)$，则

$$(x-Px,Py) = (Px-P^2x,y) = 0\ (\forall\ x,y \in H). \tag{5.19}$$

当 y 跑遍 H 时，Py 跑遍 M，(5.19)表明 $x-Px \perp M$. 另一方面，我们容易证明 $M=\mathscr{N}(I-P)$，故 M 是 H 的闭子空间. 令

$$x_1 = Px, x_2 = x - Px,$$

则

$$x = x_1 + x_2.$$

其中 $x_1 \in M$，$x_2 \in M^{\perp}$，由直交分解唯一性以及投影算子的定义立

即知 P 是 M 上的投影算子．

由定理 5.9 投影算子 P 是自伴的和幂等的，故 P 一定是正算子．

5.4 等距算子和酉算子

定义 5.5 设 H 为 Hilbert 空间，T 为 H 中的线性算子，若对任一 $x\in H$，有 $\|Tx\| = \|x\|$，则称 T 为**等距算子**；如果 T 为等距算子，且 $\mathscr{R}(T)=H$，则称 T 为**酉算子**．

例 4 设 $H=l^2$，$x=(\xi_n)\in l^2$，定义

$$Tx = (0,\xi_1,\xi_2,\cdots).$$

显然 T 是等距算子，但 $\mathscr{R}(T)\neq l^2$，故 T 不是酉算子．

例 5 设 $\{e_n: n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ 是 Hilbert 空间 H 上的完备标准直交系，k 为任一整数，H 上的线性算子 T 定义为

$$T: x = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i e_i \to Tx = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i e_{i+k},$$

其中 $x_i=(x,e_i)$，$i=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

显然，T 不仅是等距算子，而且 $\mathscr{R}(T)=H$，即 T 是酉算子．

例 6 设 $H=L^2(-\infty,+\infty)$，$a\in(-\infty,+\infty)$，作 H 上的平移算子

$$\tau_a: f(t)\to f(t+a), f\in H.$$

易知 τ_a 是 H 上的等距算子，而且 $\mathscr{R}(\tau_a)=H$. 即 τ_a 是酉算子．

定理 5.10 设 H 为 Hilbert 空间，则 T 为 H 上的等距算子的充要条件是对一切 $x,y\in H$，有

$$(Tx,Ty) = (x,y).$$

证 充分性显然，只须证明必要性．设 T 等距，任取 $x,y\in H$，因为

$$\begin{aligned} 4\mathrm{Re}(Tx,Ty) &= \|T(x+y)\|^2 - \|T(x-y)\|^2 \\ &= \|x+y)\|^2 - \|x-y\|^2 \\ &= 4\mathrm{Re}(x,y). \end{aligned}$$

另一方面,若取 iy 代替上式中的 y,便得

$$4\mathrm{Im}(Tx,Ty)=4\mathrm{Im}(x,y).$$

故

$$(Tx,Ty)=(x,y)\quad(\forall\ x,y\in H).$$

定理 5.11 设 H 为 Hilbert 空间,$T\in\mathscr{B}(H)$,则 T 是酉算子的充要条件是 $T^*T=TT^*=I$.

证 必要性:设 T 是酉算子,则 $T^{-1}\in\mathscr{B}(H)$,因为对所有的 $x,y\in H$,有

$$(T^*Tx,y)=(Tx,Ty)=(x,y).$$

故 $T^*T=I,T^*=T^{-1}$,从而

$$T^*T=TT^*=I.$$

充分性:设 $T^*T=TT^*=I$,则 $\mathscr{R}(T)=H$,且对任一 $x\in H$,

$$\|Tx\|^2=(Tx,Tx)=(x,T^*Tx)=\|x\|^2,$$

故 T 是酉算子.

参 考 书 目

[1] 余家荣．复变函数．北京：高等教育出版社，1988.

[2] 钟玉泉．复变函数论．人民教育出版社，1982.

[3] 庄圻泰，张南岳．复变函数．北京大学出版社，1984.

[4] Anthony S. B. Holland., Complex function theory, Elsovier North Holland Inc. New York. 1980.

[5] John. B. Conway., Functions of one Complex variable, Springer-Velay New York Heibelberg Berlin, 1978.

[6] 郑维行，王声望编．《实变函数与泛函分析概要》．人民教育出版社，1980.

[7] 夏道行，吴卓人，严绍宗，舒五昌编．《实变函数与泛函分析》．高等教育出版社，1985.

[8] 程其襄，张奠宙，魏国强等编．《实变函数与泛函分析基础》．高等教育出版社，1984.

[9] 严绍宗，童裕孙编著．《实变函数论与泛函分析》．经济科学出版社，1992.

[10] И. Л. 那汤松．《实变函数论》(中译本)．高等教育出版社，1958.

[11] D. Cohn., Measure Theory.

[12] P. J. Cohen., Set Theory and The Continuum HyPothesis, New York, 1966, Amsterdam.

[13] E. Kreyszin., Introductory Functional Analysis with Applications, 1980.

[14] I. J. Maddox., Elements of functional analysis.

[15] N. Dunford, J. Schwartz., Linear operators, Part I:

General theory, Interscience Publishers, New York (1958).
[16] 宋国柱,马永培等编.《实变函数与泛函分析学习指导》. 南京大学出版社,1988.